STOCHASTICKÉ MODELY V ZDRAVOTNÍCTVE

LEA ŠKROVÁNKOVÁ[1] – FRANTIŠEK SLANINKA[2]

Stochastic Models in the Health Sector

Abstract: *The aim of this paper is to theoretically describe the possibility of applying actuarial mathematics in health insurance. The development of health insurance plans displays some specific features of each country, in particular by using actuarial mathematics. The paper contains some conceptions needed for the construction of the stochastic model by Markov chains. It analyses the forms of valuating Markov chains by system's modelling, too. The paper defines the matrix of transition probabilities, i. e. stochastic matrix. It is necessary for insurance companies to know what the probabilities of transition are, e.g. if the insurant will be healthy, ill, or dead. Therefore, we were interested in the probabilities distribution state of system after n steps. For this purpose, we determined the chain: vector of initial probabilities and matrix of transition.*

Keywords: *health insurance, multistate models, Markov chains, probability of transition, matrix*

JEL Classification: C 4, I 1, K 3

Úvod

Na zdravotnícky sektor sa kladú stále väčšie požiadavky zo strany pacientov i vládnych orgánov, a to najmä vo zvyšovaní kvality poskytovaných služieb. Zdravotníctvo u nás aj v iných vyspelých štátoch v súčasnosti prechádza kritickým obdobím spôsobeným neodvratným starnutím populácie.

[1] doc. RNDr. Lea Škrovánková, PhD., University of Economics in Bratislava, Slovak Republic, e-mail: skrovankova.euba@gmail.com
[2] Mgr. František Slaninka, PhD., University of Economics in Bratislava, Slovak Republic, e-mail: frantisek.slaninka@euba.sk

Z tohto dôvodu je potrebné začať s jeho transformáciou a začať by sme mali zmenou vnímania zdravotníctva. Výsledkom by mal byť moderný efektívny systém schopný sa prispôsobovať požiadavkám doby, a tým plniť svoju primárnu úlohu, ktorou je starostlivosť o zdravie občanov a zlepšovanie zdravotného stavu celej populácie.

Cieľom tohto príspevku je vypracovanie konkrétnych stochastických modelov, ktoré by boli aplikovateľné v slovenskom zdravotníctve, a tým by mali potenciál zlepšiť stav zdravotníctva, ale hlavne sa vyrovnať práci aktuárov v zdravotných poisťovniach v krajinách Európskej únie, kde tieto modely majú už pevné miesto pri kalkuláciách poisťovní. Pozornosť sme upriamili na aktuárske modely aplikovateľné v slovenskom zdravotníctve, presnejšie na viacstavové Markovove modely. Na ilustratívnom príklade v závere príspevku sme ukázali využitie tzv. matíc prechodu s konkrétnymi výpočtami, ktorými sme demonštrovali jednoduché využitie Markovových modelov v zdravotnom poistení.

Hlavným dôvodom aktuárskeho modelovania je vyvinúť a uviesť do praxe spoľahlivé metódy na účely hodnoverných výpočtov. Ide najmä o výpočet veľkosti nemocenskej dávky a príslušného poistného, ktoré by mal poistený člen platiť. To sa potom odráža v kvalitnejšej organizácii a financovaní systémov nemocenského a zdravotného poistenia. V súčasnosti sa už v mnohých európskych krajinách v zdravotnom poistení používa matematický aparát založený na aktuárskej matematike. Dobré skúsenosti s týmto prístupom majú aktuári vo Veľkej Británii v tzv. PHI poistení (Permanent Health Insurance [11]). Aktuárska matematika, najmä stochastické modely, sa v zdravotnom poistení vo veľkej miere už využíva aj v iných krajinách.

1 Markovove reťazce

V prvom rade uvádzame niektoré pojmy potrebné na konštrukciu stochastického modelu pomocou Markovových reťazcov. Následne rozoberieme aj spôsoby oceňovania Markovových reťazcov v spojitosti so systémovým modelovaním[3]. Nech náhodný proces $X = \{X(t), t \in T\}$ je daný ako postupnosť náhodných premenných $X(t)$. Parametrom náhodného procesu X bude čas t. Predpokladajme, že každá náhodná premenná $X(t_i)$ môže nadobudnúť len konečný počet hodnôt, teda množina stavov procesu X je konečná a čas t budeme uvažovať v diskrétnych okamihoch $t_0, t_1, \ldots, t_m \ldots$ Náhodná premenná $X(t_i)$ prislúchajúca okamihu $t = t_i$ môže nadobudnúť hodnoty ${}^iS_1,\ {}^iS_2, \ldots, {}^iS_{m_i}$, kde pre rôzne i môže byť rôzne m_i. Pre zjednodušenie predpokladajme, že v každom okamihu $t = t_i$ zodpovedajúca náhodná premenná môže nadobudnúť jednu z hodnôt

$$S_1, S_2, \ldots, S_m . \tag{1}$$

V spojitosti so systémovým modelovaním sa používa nasledujúca terminológia [10]. Náhodný proces X, ktorý sa môže nachádzať v stavoch $S_1, S_2, \ldots, S_m$, uvažujme ako systém S, ktorého prvky sú stavy náhodného procesu $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Potom namiesto toho, že náhodný proces X v okamihu t_i nadobudne hodnotu S_j, budeme hovoriť, že systém S sa v okamihu t_i nachádza v stave S_j. Podobne, namiesto v okamihoch $t_0, t_1, \ldots, t_m \ldots$ je zaužívané hovoriť o krokoch, resp. fázach systému S. Označme symbolom $S_j^{(k)}$ udalosť, že systém S sa v kroku k nachádza v stave S_j. Potom systém S môžeme písať pomocou podmienených pravdepodobností $P\left[S_{j_k}^{(k)} / S_{j_{k-1}}^{(k-1)}, \ldots S_{j_1}^{(1)}, S_{j_0}^{(0)}\right]$, t. j. podmienených pravdepodobností toho, že systém sa v kroku k nachádza v stave S_{j_k} za predpokladu, že v predchádzajúcom kroku $k-1$ sa nachádzal v stave $S_{j_{k-1}}$ atď., až v kroku 0 sa nachádza v stave S_{j_0}, kde $S_{j_k}, S_{j_{k-1}}, \ldots S_{j_0}$ je ľubovoľný zo stavov

[3] V operačnej analýze sa s takýmto prístupom bežne stretneme pri modelovaní procesov obnovy, ale aj pri modelovaní hromadnej obsluhy a zásob [4].

systému (1). Stav systému v určitom kroku je teda podmienený stavmi systému v predchádzajúcich krokoch. V takomto prípade hovoríme, že systém má $(k-1)$-násobnú väzbu.

Procesy s jednoduchou väzbou, prebiehajúce v diskrétnych časových okamihoch (krokoch), sa nazývajú Markovove reťazce. Ak množina stavov (1) je konečná, ide o konečný Markovov reťazec, ak je nekonečná spočítateľná, hovoríme o nekonečnom Markovovom reťazci [5]. Na účely zdravotného poistenia sú využiteľné konečné Markovove reťazce [8].

Pre Markovov reťazec teda platí:

$$P\left[S_{j_k}^{(k)} / S_{j_{k-1}}^{(k-1)}, \dots S_{j_1}^{(1)}, S_{j_0}^{(0)}\right] = P\left[S_{j_k}^{(k)} / S_{j_{k-1}}^{(k-1)}\right]. \tag{2}$$

Ak ľubovoľný náhodný proces má vlastnosť (2), tak hovoríme, že má Markovovu vlastnosť. Na popis Markovovho reťazca sú teda postačujúce podmienené pravdepodobnosti toho, že sa systém v kroku k nachádza v stave S_j, za predpokladu, že v predchádzajúcom kroku $k-1$ sa nachádzal v stave S_i. Označme túto pravdepodobnosť $p_{ij}(k)$:

$$p_{ij}(k) = P\left[S_j^{(k)} / S_i^{(k-1)}\right]. \tag{3}$$

Pravdepodobnosti $p_{ij}(k)$ nazývame pravdepodobnosti prechodu. Vo všeobecnosti závisia od východiskového kroku $k-1$ (východiskového okamihu t_{k-1}) a od rozdielu $t_k - t_{k-1}$ (dobe medzi dvoma nasledujúcimi krokmi, resp. okamihmi). Ak pravdepodobnosti prechodu $p_{ij}(k)$ nezávisia od počiatočného kroku $k-1$, ale závisia len od doby medzi dvoma po sebe idúcimi krokmi t_k a t_{k-1}, tak hovoríme o homogénnom Markovovom reťazci. Táto skutočnosť pre nás znamená, že pravdepodobnosť poistného plnenia závisí len od dĺžky poistnej doby, čo je v zdravotnom poistení akceptovateľné, preto sa ďalej budeme zaoberať len homogénnymi Markovovými reťazcami.

Rozdiel $t_k - t_{k-1}$ nazveme dĺžkou k-teho kroku v Markovovom reťazci. Ak budeme predpokladať, že dĺžka každého kroku je rovnaká (čo v praxi nie je problém), teda $\Delta t_k = t_k - t_{k-1} = kon\check{s}t, k = 1, 2, \ldots$

Z časového hľadiska môžeme uvažovať túto konštantu rovnajúcu sa jednému časovému obdobiu (rok, mesiac, týždeň). Potom pravdepodobnosti prechodu $p_{ij}(k)$ v homogénnom Markovovom reťazci môžeme označovať p_{ij}.

2 Matice pravdepodobností prechodu

V konečnom Markovovom reťazci s počtom stavov m môžeme pravdepodobnosti prechodu p_{ij} usporiadať do matice $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Maticu $\mathbf{P}$ nazývame maticou pravdepodobností prechodu (maticou prechodu), pričom pre pravdepodobnosti prechodu p_{ij} platí: $0 \le p_{ij} \le 1$, $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1, i = 1, 2, \ldots, m$.

Maticu, ktorej prvky vyhovujú vyššie uvedeným podmienkam, nazývame stochastickou maticou. Matica prechodu je teda stochastickou maticou. Reťazec bude určený, ak nájdeme vzťah, pomocou ktorého budeme vedieť určiť pravdepodobnosť výskytu ľubovoľnej postupnosti stavov systému $S_{j_0}, S_{j_1}, \ldots S_{j_k}$ pre postupnosť časových okamihov $t_0, t_1, \ldots, t_k$. Podľa vety o násobení pravdepodobností[4] dostaneme

[4] $P(AB) = P(A)P(B/A)$, bližšie v [2].

$$P\left[S_{j_k}^{(k)}, S_{j_{k-1}}^{(k-1)}, \ldots S_{j_1}^{(1)}, S_{j_0}^{(0)}\right] = P\left[S_{j_k}^{(k)} / S_{j_{k-1}}^{(k-1)}, \ldots S_{j_1}^{(1)}, S_{j_0}^{(0)}\right] \times P\left[S_{j_{k-1}}^{(k-1)}, \ldots S_{j_1}^{(1)}, S_{j_0}^{(0)}\right] =$$

$$. = p_{j_{k-1}j_k} P\left[S_{j_{k-1}}^{(k-1)}, \ldots S_{j_1}^{(1)}, S_{j_0}^{(0)}\right]$$

Podobne by sme mohli vyjadriť $P\left[S_{j_{k-1}}^{(k-1)}, \ldots S_{j_1}^{(1)}, S_{j_0}^{(0)}\right]$ a tak pokračovať ďalej. Nakoniec dostaneme

$$P\left[S_{j_k}^{(k)}, S_{j_{k-1}}^{(k-1)}, \ldots S_{j_1}^{(1)}, S_{j_0}^{(0)}\right] = p_{j_{k-1}j_k} p_{j_{k-2}j_{k-1}} \ldots p_{j_0 j_1} p_{j_0} .$$

Pravdepodobnosti $p_{j_{k-1}j_k} p_{j_{k-2}j_{k-1}} \ldots p_{j_0 j_1}$ sú prvkami matice prechodu **P**. Pravdepodobnosť p_{j_0} je pravdepodobnosť výskytu stavu S_{j_0} z množiny stavov na začiatku procesu. Pre $j_0 = 1, 2, \ldots, m$ dostávame rozdelenie pravdepodobností stavov systému v počiatočnom okamihu. Tieto nepodmienené pravdepodobnosti vytvárajú vektor počiatočných pravdepodobností $p(0)$, pričom $p(0) = \left(p_1(0), p_2(0), \ldots, p_m(0)\right)$.

Na prácu s homogénnym Markovovým reťazcom potrebujeme teda poznať vektor pravdepodobností $p(0)$ *a* maticu prechodu **P**. Pre poisťovňu je dôležité vedieť, aké sú pravdepodobnosti toho, že systém (poistenec) bude v danom stave (zdravý, alebo mŕtvy) po n obdobiach (väčšinou rokoch). Bude nás teda zaujímať rozdelenie pravdepodobností, t. j. rozdelenie pravdepodobností stavov systému po určitom období n (po n krokoch). Predpokladáme, že reťazec je určený, t. j. že je daný vektor počiatočných pravdepodobností $p(0)$ a matica prechodu **P**. Určíme najskôr rozdelenie pravdepodobností po jednom kroku. Označme $p_i(1)$ ako pravdepodobnosť toho, že systém sa po jednom kroku bude nachádzať v stave S_i. Pretože stavy S_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ vytvárajú úplný systém stavov, podľa vety o úplnej pravdepodobnosti[5] máme

[5] $P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[B_i] P[A \mid B_i]$, bližšie v [2].

$$p_i(1) = p_1(0)p_{1i} + p_2(0)p_{2i} + \ldots + p_m(0)p_{mi} = \sum_{j=1}^{m} p_j(0)p_{ij} \,. \tag{5}$$

Pre $i = 1, 2, \ldots, m$ pravdepodobnosti $p_i(1)$ vytvoria vektor pravdepodobností $p(1)$ po jednom kroku $p(1) = \left(p_1(1), p_2(1), \ldots, p_m(1)\right)$, i-tu zložku vektora pravdepodobností $p(1)$ dostaneme podľa (5) tak, že j-tu zložku vektora $p(0)$ násobíme prvkom nachádzajúcom sa v j-tom riadku a i-tom stĺpci matice **P** a takto vzniknuté súčiny sčítame. Môžeme teda písať

$$p(1) = p(0)\,\mathbf{P}. \tag{6}$$

Určíme teraz rozdelenie pravdepodobností po dvoch krokoch, teda vektor $p(2)$. Použijeme analogický spôsob s tým, že za vektor počiatočných pravdepodobností zoberieme vektor $p(1)$. Podľa (6) dostaneme

$$p(2) = p(1)\;\mathbf{P} = p(0)\,\mathbf{P}^2 \,.$$

Metódou matematickej indukcie sa dá dokázať, že pre vektor pravdepodobností $p(n)$ po n krokoch platí

$$p(n) = p(n-1)\;\mathbf{P} = p(0)\,\mathbf{P}^n \,. \tag{7}$$

Pomocou vzťahu (7) môžeme zistiť, či v uvažovanom systéme existuje limitné rozdelenie pravdepodobností alebo stacionárne rozdelenie, teda také, ktoré sa už s rastúcim n nemení.

Predpokladajme, že existujú také absolútne pravdepodobnosti $p_1, p_2, \ldots, p_m$ (toho, že systém sa bude nachádzať v stave $S_1, S_2, \ldots, S_m$), ktoré už nie sú závislé od počtu krokov n. Tieto pravdepodobnosti vytvárajú vektor stacionárnych pravdepodobností p, kde $p = \left(p_1, p_2, \ldots, p_m\right)$, pričom $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Ak existuje limitné rozdelenie pravdepodobností $p_i(n)$, tak musí platiť: $\lim_{n\to\infty} p(n) = p \;\;\wedge\;\; \lim_{n\to\infty} p(n+1) = p$. Zo vzťahu (7) dostaneme: $p = p\,\mathbf{P}$ alebo, po ekvivalentných úpravách, $p\,[\mathbf{E} - \mathbf{P}] = \mathbf{0}$, kde **E** je jednotková matica m-teho rádu a **0** je m-rozmerný nulový vektor. Tento systém homogénnych lineárnych rovníc je riešiteľný, ak $\det[\mathbf{E} - \mathbf{P}] = 0$[6].

Táto podmienka je pre maticu prechodu splnená. Takže náš systém má nekonečne veľa riešení, z ktorých vyberieme to, pre ktoré platí:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Vráťme sa k spomínanému trojstavovému modelu a pokúsme sa predchádzajúcu teóriu použiť v praxi. Poistenec predstavuje systém, ktorý sa môže nachádzať v jednom z troch uvažovaných stavov, a to v stave (1) – zdravý, (2) – chorý, (3) – mŕtvy. Vektor $p(n) = \left(p_1(n),\, p_2(n),\, p_3(n)\right)$ opisuje pravdepodobnosť toho, v akom stave sa poistenec nachádza po n krokoch (obdobiach). Za jedno obdobie môžeme uvažovať jeden rok. Prvá zložka teda vyjadruje pravdepodobnosť toho, že poistenec bude po n rokoch zdravý, druhá zložka pravdepodobnosť toho, že bude po n rokoch chorý a tretia, že poistenec po n rokoch umrie.

V klasickom trojstavovom modeli zdravotného poistenia má matica prechodu tvar (podrobne v [8]):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \tag{8}$$

a vektor počiatočných pravdepodobností $p(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, keďže každá novopoistená osoba je v stave (1), teda zdravá. Určíme vektor pravdepodobností $p(1)$ a $p(2)$ podľa (6), resp. (7).

$$p(1) = p(0)\,\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \end{pmatrix}.$$

[6] V lineárnej algebre známe ako Cramerovo pravidlo.

Rozdelenie pravdepodobností po jednom roku sa teda rovná prvému riadku matice prechodu.

$$p(2) = p(1)\,\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} + p_{13}p_{32} & p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{33} \end{pmatrix}$$

.

Po dvoch rokoch sú jednotlivé zložky vektora pravdepodobností tvorené zo súčtov pravdepodobností prechodu cez všetky stavy, v ktorých sa môže systém nachádzať medzi prvým a druhým rokom. Je zrejmé, že pravdepodobnosti p_{31} a p_{32} sú rovné nule a pravdepodobnosť p_{33} sa rovná jednej (pretože stav mŕtvy je absorpčný). Preto posledný riadok matice prechodu sa rovná vektoru (0 0 1). Teda

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

a

$$p(2) = \begin{pmatrix} p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} & p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13} \end{pmatrix}.$$

Po dostatočne veľkom počte rokov sa všetky osoby budú nachádzať v stave mŕtvy a z tohto stavu sa už do iného stavu nedostanú. Takže pre prípad zdravotného poistenia je evidentné, že vektor stacionárnych pravdepodobností p bude $p = (\,0, 0, 1\,)$.

3 Rozdelenie podmienených pravdepodobností prechodu

Budeme hľadať podmienené pravdepodobnosti prechodu vyšších rádov, t. j. pravdepodobnosti prechodu systému zo stavu S_i do stavu S_j po n krokoch. Poisťovňu napríklad môže zaujímať, aká je pravdepodobnosť toho, že poistenec bude po niekoľkých týždňoch (mesiacoch, rokoch) chorý, ak je chorý aj v súčasnosti. Označme tieto pravdepodobnosti $p_{ij}^{(n)}$. Pri výpočte tejto pravdepodobnosti musíme uvážiť všetky možné stavy, v ktorých sa môže systém nachádzať medzi tým, ako sa dostane zo stavu S_i do stavu S_j [10].

Nech $n = n_1 + n_2$. Predpokladáme, že na začiatku procesu (v okamihu 0) bol systém v stave S_i, po n_1 krokoch sa bude nachádzať v stave S_k a po ďalších n_2 krokoch sa bude nachádzať v stave S_j. Potom pre $k = 1, 2, \ldots, m$ platí Chapman-Kolmogorovova rovnica [2]:

$$p_{ij}^{(n_1+n_2)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}^{(n_1)} p_{kj}^{(n_2)} . \tag{10}$$

Pre $n_1 = n_2 = 1$ zo vzťahu (10) dostaneme: $p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik} p_{kj}$, teda prvok $p_{ij}^{(2)}$ dostaneme ako súčet súčinov zodpovedajúcich prvkov i-teho riadka a j-teho stĺpca matice **P**. Matica pravdepodobností prechodu po dvoch krokoch $\mathbf{P}^2$ sa teda rovná súčinu **P**.**P**:

$$\left\{p_{ij}^{(2)}\right\} = \mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^2$$

a metódou matematickej indukcie možno ukázať, že pre $p_{ij}^{(n)}$ platí:

$$\left\{p_{ij}^{(n)}\right\} = \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n .$$

Pozrime sa bližšie na prvky matice $\mathbf{P}^2$. Pre zjednodušenie uvažujme maticu **P** pre $i, j = 1,\ 2,\ 3$.

Vynásobením dvoch matíc prechodu dostaneme

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} + p_{13}p_{32} & p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{33} \\ p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} + p_{23}p_{31} & p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22} + p_{23}p_{32} & p_{21}p_{13} + p_{22}p_{23} + p_{23}p_{33} \\ p_{31}p_{11} + p_{32}p_{21} + p_{33}p_{31} & p_{31}p_{12} + p_{32}p_{22} + p_{33}p_{32} & p_{31}p_{13} + p_{32}p_{23} + p_{33}p_{33} \end{bmatrix}.$$

Interpretácia matice $\mathbf{P}^2$:

Prvý člen $p_{11}^{(2)}$ opisuje pravdepodobnosť toho, že systém sa po dvoch sledovaných obdobiach nachádza v stave S_1 za predpokladu, že sa na začiatku nachádzal v stave S_1 a počas tohto obdobia sa mohol nachádzať v jednom z troch stavov S_1, S_2, S_3. Analogicky by sme interpretovali aj ostatné členy matice.

Zaujíma nás, aká bude situácia v trojstavovom modeli zdravotného poistenia. Uvažujme teda maticu (9) a opäť počítajme $\mathbf{P}^2$:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} & p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13} \\ p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} & p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22} & p_{21}p_{13} + p_{22}p_{23} + p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Interpretácia matice $\mathbf{P}^2$:

Člen $p_{11}^{(2)}$ opisuje pravdepodobnosť toho, že poistenec je v stave (1), za predpokladu, že na začiatku bol v stave (1)a počas sledovaného obdobia sa mohol nachádzať v stave (1), alebo (2), teda zdravý alebo chorý.

Člen $p_{12}^{(2)}$ opisuje pravdepodobnosť toho, že poistenec bude chorý, za predpokladu, že je zdravý a počas sledovaného obdobia môže byť zdravý, alebo chorý. Člen $p_{21}^{(2)}$ opisuje pravdepodobnosť, že poistenec bude zdravý, za predpokladu, že je chorý, a teda počas sledovaného obdobia bude zdravý, alebo chorý.

S porovnaním so vzťahom (7) v podstate dostávame rovnaké výsledky (pri rovnako dlhých obdobiach n_1 a n_2). Pri tomto výpočte pravdepodobností nepotrebujeme vektor počiatočných pravdepodobností. Jednotlivé členy matice $\mathbf{P}^2$, resp. $\mathbf{P}^n$ opisujú všetky možné pravdepodobnosti prechodu zo stavu (*i*) do stavu (*j*) pre $i, j = 1, 2, 3$.

4 Markovove reťazce s ocenením

Predpokladajme, že každej pravdepodobnosti prechodu p_{ij} systému zo stavu S_i do stavu S_j je priradené určité ocenenie r_{ij}. V takomto prípade hovoríme o Markovovom reťazci s ocenením.

Ocenenia prechodu r_{ij} vytvárajú maticu **R**:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mm} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Ocenenia r_{ij} môžu byť konštantné, klesajúce alebo rastúce vzhľadom na n, používa sa tiež diskontované ocenenie prechodu. V ďalšom budeme predpokladať, že r_{ij} sú konštanty. Pri výnosoch je to zrejmé a poistné plnenia môžeme takisto považovať za konštantné, ak ich budeme diskontovať o predpokladanú mieru inflácie [4]. Ak sa v Markovovom reťazci vykoná n krokov, tak ocenenia (výnosy alebo straty) jednotlivých krokov sa spočítajú. Na ocenenie celkového výnosu po n krokoch, ak sa na začiatku systém nachádza v stave S_i, použijeme veličinu $v_i^{(n)}$, ktorú vypočítame podľa rekurentného vzťahu

$$v_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\left[r_{ij} + v_j^{(n-1)}\right], \tag{12}$$

kde $v_j^{(0)}$ je ocenenie stavu S_j na začiatku procesu. Spravidla je $v_j^{(0)} = 0$. Vzťah (12) vyjadruje, že celkové ocenenie pri prechode zo stavu S_i po n krokoch sa skladá z ocenenia tohto prechodu a zo strednej hodnoty ocenenia vyplývajúceho z prechodu do stavu S_j počas $n-1$ krokov. Označme strednú hodnotu bezprostredného ocenenia $q_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} r_{ij}$. Vzťah (12) potom bude mať tvar:

$$v_i^{(n)} = q_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} v_j^{(n-1)} .$$

Pre $i = 1, 2, \ldots, m$ veličiny $v_i^{(n)}$ sú zložky vektora absolútnych ocenení $v^{(n)}$ a veličiny q_i sú zložky vektora bezprostredného výnosu q.

V modeli zdravotného poistenia **R** je maticou tretieho rádu (trojrozmerná) s oceneniami r_{ij} pre $i, j = 1, 2, 3$.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Ocenenia r_{11}, r_{21} budú zrejme pre poisťovňu výnosom. Pritom r_{11} bude poistné, ktoré platia poistenci, keď sú zdraví a v predchádzajúcom období boli tiež zdraví. A r_{21} bude poistné, ktoré platia poistenci, keď sú zdraví a v predchádzajúcom období boli chorí. Ocenenia r_{12}, r_{22} budú, naopak, nákladmi poisťovne. Bude to poistné plnenie, ktoré platí poisťovňa poistencom, ktorí sú chorí. Konkrétne r_{12} v prípade, že poistenec bol v predchádzajúcom období zdravý a r_{22} v prípade, že poistenec bol v predchádzajúcom období chorý. Ostatné ocenenia sa budú rovnať nule, keďže pri úmrtí nedochádza k finančným tokom. V takom prípade matica ocenení je iba dvojrozmerná.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Ocenenie celkového výnosu po n krokoch (rokoch) $v_i^{(n)}$ má zmysel pre $i = 1, 2$. Teda $v_1^{(n)}$ predstavuje ocenenie celkového výnosu po n krokoch, ak bola osoba na začiatku zdravá a $v_2^{(n)}$, ak bola na začiatku chorá. Pre $n = 1$ podľa (12) dostávame

$$v_1^{(1)} = \sum_{j=1}^{2} p_{1j}\left(r_{1j} + v_j^{(0)}\right) = p_{11}r_{11} + p_{11}v_1^{(0)} + p_{12}r_{12} + p_{12}v_1^{(0)} = p_{11}r_{11} + p_{12}r_{12}\,,$$

$$v_2^{(1)} = \sum_{j=1}^{2} p_{2j}\left(r_{2j} + v_j^{(0)}\right) = p_{21}r_{21} + p_{21}v_1^{(0)} + p_{22}r_{22} + p_{22}v_2^{(0)} = p_{21}r_{21} + p_{22}r_{22}\,.$$

Celkové ocenenie po roku, ak bola osoba na začiatku zdravá, sa skladá z dvoch zložiek. Prvá sa rovná súčinu pravdepodobnosti, že osoba ostane zdravá, a výškou poistného, a druhá pravdepodobnosti, že osoba ochorie, vynásobená poistným plnením.

V druhom prípade, teda ak bola osoba na začiatku chorá, sa prvá zložka rovná súčinu pravdepodobnosti, že osoba vyzdravie, a výškou poistného, a druhá zložka sa rovná súčinu pravdepodobnosti, že osoba ostane chorá, a poistného plnenia. Teda sú to súčty výnosov a nákladov poisťovne. Teda vektor celkového ocenenia má tvar

$$v^{(1)} = \left(v_1^1,\, v_2^1\right) = \left(p_{11}r_{11} + p_{12}r_{12},\, p_{21}r_{21} + p_{22}r_{22}\right)$$

Pre $n = 2$:

$$v_1^{(2)} = \sum_{j=1}^{2} p_{1j}\left(r_{1j} + v_j^{(1)}\right) = p_{11}r_{11} + p_{11}v_1^{(1)} + p_{12}r_{12} + p_{12}v_2^{(1)} = v_1^{(1)} + p_{11}v_1^{(1)} + p_{12}v_2^{(1)}\,,$$

$$v_2^{(2)} = \sum_{j=1}^{2} p_{2j}\left(r_{2j} + v_j^{(1)}\right) = p_{21}r_{21} + p_{21}v_1^{(1)} + p_{22}r_{22} + p_{22}v_2^{(1)} = v_2^{(1)} + p_{21}v_1^{(1)} + p_{22}v_2^{(1)}\,.$$

Po dvoch rokoch sa celkové ocenenie rovná oceneniu po roku zvýšenom o dva súčiny. V prípade, ak osoba bola na začiatku zdravá, je to súčin pravdepodobnosti, že osoba ostane zdravá, a ocenenia $v_1^{(1)}$, a súčin pravdepodobnosti, že osoba ochorie, a ocenenia $v_2^{(1)}$. Súčiny v prípade, že osoba bola na začiatku chorá, sú analogické. V maticovom tvare $v^{(2)} = \left(v_1^{(2)} \quad v_2^{(2)}\right)$ potom platí

$$v^{(2)} = \left(v_1^{(2)} \quad v_2^{(2)}\right) = \left(v_1^{(1)} \quad v_2^{(1)}\right) + \left(v_1^{(1)} \quad v_2^{(1)}\right)\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = v^{(1)} + v^{(1)}\mathrm{P} = v^{(1)}\left(\mathrm{E} + \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\right)$$

,

kde E je dvojrozmerná jednotková matica.

Pre $n = 3$:

$$v_1^{(3)} = \sum_{j=1}^{2} p_{1j}\left(r_{1j} + v_j^{(2)}\right) = p_{11}r_{11} + p_{11}v_1^{(2)} + p_{12}r_{12} + p_{12}v_2^{(2)} = v_1^{(1)} + p_{11}v_1^{(2)} + p_{12}v_2^{(2)},$$

$$v_2^{(3)} = \sum_{j=1}^{2} p_{2j}\left(r_{2j} + v_j^{(2)}\right) = p_{21}r_{21} + p_{21}v_1^{(2)} + p_{22}r_{22} + p_{22}v_2^{(2)} = v_1^{(1)} + p_{21}v_1^{(2)} + p_{22}v_2^{(2)}.$$

V maticovom tvare $v^{(3)} = \left(v_1^{(3)} \quad v_2^{(3)}\right)$potom platí

$$v^{(3)} = \left(v_1^{(3)} \quad v_2^{(3)}\right) = \left(v_1^{(1)} \quad v_2^{(1)}\right) + \left(v_1^{(2)} \quad v_2^{(2)}\right)\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = v^{(1)} + v^{(2)}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}.$$

Vo všeobecnosti pre n rokov $v^{(n)} = \left(v_1^{(n)} \quad v_2^{(n)}\right)$ v maticovom tvare platí

$$v^{(n)} = v^{(1)} + v^{(n-1)}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}. \tag{15}$$

Vektor ocenenia celkového výnosu po n rokoch sa rovná súčtu celkového ocenenia po roku a celkového ocenenia po $n-1$ rokoch vynásobeného maticou prechodu.

5 Markovove procesy

Keď sa pohyb poistencov medzi stavmi sleduje v diskrétnych časových okamihoch, je prístup prostredníctvom Markovových reťazcov vyhovujúci. Vo väčšine prípadov je skreslenie prijateľné a zjednodušenie výpočtu značné. Ako však napreduje technický rozvoj, pre súčasné počítačové vybavenie nie je žiadny problém pracovať aj so spojitým modelom, keď sa uvažuje o zmenách stavu systému v ľubovoľnom časovom okamihu [9]. Model sa týmto stáva vernejším obrazom reality. Samotný princíp výpočtu je analogický ako postup prostredníctvom Markovových reťazcov, spomenieme len isté odlišnosti vyplývajúce z použitia spojitej časovej premennej. Hneď prvá odlišnosť je v pomenovaní – ak procesy s jednoduchou väzbou prebiehajú v spojitom čase, hovoríme o Markovových procesoch [8].

Budeme teraz používať symboliku typickú pre túto oblasť. Predpokladajme, že osoba je vo veku x, a sledujme jej správanie sa v čase $\Delta t \geq 0$. Predpokladajme, že v ľubovoľnom okamihu sa môže nachádzať len v niektorom z m stavov systému $S_1, S_2, \ldots, S_m$.

Pravdepodobnosti prechodu majú tvar

$$p_{ij}(x, x+\Delta t) \text{ pre } \Delta t \geq 0 \text{, resp. } {}_{\Delta t}p_x^{ij} .$$

Predpokladajme existenciu týchto limít

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_{\Delta t}p_x^{ij}}{\Delta t} = \mu_x^{ij} \geq 0, i \neq j \text{ a } \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - {}_{\Delta t}p_x^{ii}}{\Delta t} = \mu_x^{ii} \geq 0 .$$

Veličina μ_x^{ij} sa nazýva intenzita pravdepodobnosti prechodu zo stavu S_i do stavu S_j. Veličina μ_x^{ii} sa nazýva intenzita pravdepodobnosti výstupu zo stavu S_i. Matica pravdepodobnosti prechodu $\mathbf{P}(x, x+\Delta t)$ obsahuje podmienené pravdepodobnosti výskytu určitých stavov v čase $x+\Delta t$ za podmienky výskytu určitých stavov v čase x

$$\mathbf{P}(x, x+\Delta t) = \begin{bmatrix} 1-\mu_x^{11}\Delta t & \mu_x^{12}\Delta t & \ldots & \mu_x^{1m}\Delta t \\ \mu_x^{21}\Delta t & 1-\mu_x^{22}\Delta t & \ldots & \mu_x^{2m}\Delta t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_x^{m1}\Delta t & \mu_x^{m2}\Delta t & \ldots & 1-\mu_x^{mm}\Delta t \end{bmatrix}, \tag{16}$$

pričom platí

$$1 - \mu_x^{ii}\Delta t + \sum_{j \neq i} \mu_x^{ij}\Delta t = 1 ,$$

z čoho vyplýva

$$\mu_x^{ii}\Delta t = \sum_{j \neq i} \mu_x^{ij}\Delta t .$$

Matica intenzít pravdepodobností prechodu $\mathbf{A}(x)$ má tvar:

$$\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} -\mu_x^{11} & \mu_x^{12} & \dots & \mu_x^{1m} \\ \mu_x^{21} & -\mu_x^{22} & \dots & \mu_x^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_x^{m1} & \mu_x^{m2} & \dots & -\mu_x^{mm} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Pre matice $\mathbf{P}(x, x+\Delta t)$ a $\mathbf{A}(x)$ platí vzťah:

$$\mathbf{P}(x, x+\Delta t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}(x)\Delta t\,. \tag{18}$$

Vektory počiatočných pravdepodobností a nepodmienených pravdepodobností sú rovnaké ako pri diskrétnom čase:

$$p(0) = \big(p_1(0), p_2(0), \dots, p_m(0)\big),$$
$$p(x) = \big(p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)\big).$$

Tak, ako pre Markovove reťazce platil vzťah (7): $p(n) = p(n-1)\,\mathbf{P} = p(0)\,\mathbf{P}^n$, pre spojitý prípad platí vzťah:

$$p(x+\Delta t) = p(x)\,\mathbf{P}(x, x+\Delta t) \tag{19}$$

a po dosadení za $\mathbf{P}(x, x+\Delta t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}(x)\Delta t$ dostaneme

$$p(x+\Delta t) = p(x) + p(x)\,\mathbf{A}(x)\Delta t\,,$$

$$\frac{p(x+\Delta t) - p(x)}{\Delta t} = p(x)\;\mathbf{A}(x)\,.$$

Ak označíme $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{p(x+\Delta t) - p(x)}{\Delta t} = p'(x)$, potom $p'(x) = p(x)\;\mathbf{A}(x)$.

Ak rozpíšeme posledný vzťah na jednotlivé zložky, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\,p_i(x)}{\mathrm{d}\,x} = \sum_{j=1}^{m} p_j(x)\delta_{ji}\mu_x^{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

kde $\delta_{ji} = 1$, ak $j \neq i$, $\delta_{ji} = -1$, ak $j = i$.

Dospeli sme k sústave Kolmogoronových diferenciálnych rovníc. Táto sústava má jednoznačné riešenie vtedy, keď je daný vektor počiatočných pravdepodobností, a ak sú intenzity μ_x^{ji} spojité. Pre homogénny Markovov proces platí rovnaká Chapman-Kolmogorovova rovnica ako pre Markovove reťazce:

$$\mathbf{P}(s_1 + s_2) = \mathbf{P}(s_1)\,\mathbf{P}(s_2)\,, \tag{20}$$

kde $\mathbf{P}(s_1+s_2)$ je matica prechodu pre časový interval $\Delta t = s_1 + s_2$.

Vektor stacionárnych pravdepodobností $p=(p_1, p_2, \dots p_m)$ nie je závislý od času, preto sa jeho derivácia bude rovnať nule, a teda dostaneme vzťah:

$$\mathbf{0} = p\ \mathbf{A}(x),$$
$$\mathbf{0} = p\,[\mathbf{P\text{-}E}]\,(\Delta t)^{-1},$$

a odtiaľ pre $(\Delta t) \neq 0$ dostávame vzťah $p = p\,\mathbf{P}$, ktorý sa zhoduje so vzťahom pre Markovove reťazce ($p = p\,\mathbf{P}$). Rozdiel je teda predovšetkým v matici prechodu. V Markovových procesoch pracujeme s intenzitami μ_x^{ij}, resp. μ_x^{ii}, ktoré závisia od veku x, a rovnako tak vektor absolútnych pravdepodobností $p(x) = \left(p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)\right)$. Práve vek zohráva veľkú úlohu pri zdravotnom stave ľudí.

Tieto teoretické poznatky zhrnieme do nasledujúceho ilustračného príkladu. Vypočítame rozdelenie pravdepodobností po 1, 5 a 10 rokoch 30 a 50-ročnej osoby, ktorá má záujem o nemocenské poistenie. Maticu prechodu, ktorú daná poisťovňa používa pre osoby vo veku x rokov, označíme P_x.

Nech pre $x = 30$, $\mathrm{P}_{30} = \begin{bmatrix} 0{,}737 & 0{,}26 & 0{,}003 \\ 0{,}625 & 0{,}37 & 0{,}005 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a pre $x = 50$,

$$\mathrm{P}_{50} = \begin{bmatrix} 0{,}73 & 0{,}26 & 0{,}01 \\ 0{,}62 & 0{,}37 & 0{,}01 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Riešenie[7].

Označme $p_x(i)$ vektor pravdepodobností pre x-ročnú osobu po i- tom roku.

Pre $i = 0,\ p_x(0) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, potom pre $i = 1$ vypočítame:

[7] Pri výpočtoch bol použitý počítačový softvér Microsoft Office Excel 2003.

$$p_{30}(1)=p_{30}(0)\mathrm{P}_{30}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0,737 & 0,26 & 0,003\\ 0,625 & 0,37 & 0,005\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0,737 & 0,26 & 0,003\end{pmatrix},$$

$$p_{50}(1)=p_{50}(0)\mathrm{P}_{50}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0,73 & 0,26 & 0,01\\ 0,62 & 0,37 & 0,01\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0,73 & 0,26 & 0,01\end{pmatrix}.$$

Pre $i=5$

$$p_{30}(5)=p_{30}(0)\mathrm{P}_{30}^{5}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0,6946 & 0,2883 & 0,017\\ 0,693 & 0,2877 & 0,0193\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0,6946 & 0,2883 & 0,017\end{pmatrix},$$

$$p_{50}(5)=p_{50}(0)\mathrm{P}_{50}^{5}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0,6897 & 0,2863 & 0,024\\ 0,6895 & 0,2862 & 0,0243\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0,6897 & 0,2863 & 0,024\end{pmatrix}.$$

Pre $i=10$

$$p_{30}(10)=p_{30}(0)\mathrm{P}_{30}^{10}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0,6822 & 0,2832 & 0,0346\\ 0,6807 & 0,2825 & 0,0368\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0,6822 & 0,2832 & 0,0346\end{pmatrix},$$

$$p_{50}(10)=p_{50}(0)\mathrm{P}_{50}^{10}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0,673 & 0,2794 & 0,0476\\ 0,6727 & 0,2793 & 0,048\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0,673 & 0,2794 & 0,0476\end{pmatrix}.$$

Výsledky sprehľadníme v tabuľke č. 1.

Tab. č. 1

Pravdepodobnosti prechodu do určitého stavu

Vek	**30**	**50**	**30**	**50**	**30**	**50**
Stav	*zdravý*		*chorý*		*mŕtvy*	
po 1 roku	0,737	0,73	0,26	0,26	0,003	0,01
po 5 rokoch	0,6946	0,6897	0,2883	0,2863	0,017	0,024
po 10 rokoch	0,6822	0,673	0,2832	0,2794	0,0346	0,0476

Prameň: **vlastné výpočty.**

Z výpočtov vidíme, že s pribúdajúcim vekom sa pravdepodobnosť toho, že osoba vo veku 30 aj 50 rokov ostane zdravá, znižuje, a naopak, že bude chorá, zvyšuje. Najväčšie rozdiely pri daných maticiach prechodu sú pri pravdepodobnosti úmrtia, ktorá po 10 rokoch u 30-ročnej osoby dosiahla desaťnásobok, u 50-ročnej osoby takmer päťnásobok.

Záver

Zdravotné systémy v rôznych krajinách sa značne odlišujú, najmä využívaním aktuárskej matematiky pri výpočtoch výšky poistného a poistného plnenia. Ich dôslednou analýzou môžeme získať kvalitné návrhy, ktoré by sme mohli aplikovať aj na Slovensku a zlepšiť tak stav nášho zdravotného systému (podrobne v [16]). Preto príspevok predstavuje niektoré Markovove modely a na konkrétnom príklade sme ukázali, ako sa dajú využiť v zdravotnom a nemocenskom poistení. Autori sa snažili o praktické využitie všetkých vypočítaných pravdepodobností prechodov a reálne využitie aplikácie Markovových reťazcov v praxi. V závere príspevku je výpočet rozdelenia pravdepodobností pre konkrétnu osobu, ktorá má záujem o nemocenské poistenie.

Príspevok by mohol byť prínosom pre slovenskú aktuársku prax, keďže ponúka teoretické aj praktické vedomosti pre aktuárov, čo by mohlo v budúcnosti viesť ku kvalitnejšej organizácii financovania systémov zdravotného poistenia.

Literatúra

[1] KOVÁČ, E. *Zdravotné poistenie.* (Health insurance). Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2008. ISBN 978-80-89171-62-0.

[2] LAMOŠ, F. – POTOCKÝ, R. *Pravdepodobnosť a matematická štatistika.* (Probability and mathematical statistics). 2. vyd. Bratislava: Vydavateľstvo UK, 1998. ISBN 80-223-1262-2.

[3] MOJŽIŠOVÁ, E. – ŠKROVÁNKOVÁ, P. Transformačné kroky v zdravotnom poistení a analýza zdravotnej starostlivosti v SR. (Transformation steps in health insurance and analysis of health care in the Slovak Republic). In: *Ekonomika a informatika*, 2009, č. 2,ISSN 1336 – 3514.

[4] POTOCKÝ, R. *Modely v životnom a neživotnom poistení.* (Models in life and nonlife insurance). Bratislava: STATIS, 2012. ISBN 978-80-85659-71-9.

[5] RIEVAJOVÁ, E. a kol. *Sociálne zabezpečenie.* (Social security). Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2011. ISBN 987-80-225-3190-0.

[6] ROVNÝ, I. *Verejné zdravotníctvo.* (Public health). Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2009. ISBN 978-80-89171-60-6.

[7] SEKEROVÁ, V. – BILÍKOVÁ, M. *Poistná matematika.* (Actuarial mathematics). Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2005. ISBN 80-225-2001-2.

[8] ŠKROVÁNKOVÁ, L. *Zdravotné a nemocenské poistenie.* (Health and sickness insurance). Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2013. ISBN 978-80-225-3590-8.

[9] ŠKROVÁNKOVÁ, L. – ŠKROVÁNKOVÁ, P. *Dôchodkové, zdravotné a nemocenské poistenie.* (Pension, health and sickness insurance). Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2010. ISBN 978-80-225-2924-2.

[10] ŠKROVÁNKOVÁ, P. Modely prerozdelenia poistného v zdravotnom poistení. (Models of premium re-allocation in health insurance). In: *Ekonomika a informatika,* 2011, č. 1, ISSN 1336-3514.

[11] ŠOLTÉS, M. – DELINA, R. Analýza online poisťovníctva. (Analysis of online insurance). In: *Ekonomie a management,* 2004, č. 4, ISSN 1212-3609.

[12] HPI – Health Policy Institute – HPI. Available at: http://www.hpi.sk

[13] Available at: www.socpoist.sk

[14] Available at: www.unipo.sk/public/media/17467/Syst%C3%A9m%starostlivost

[15] Available at: www.employment.gov.sk/zmeny-od-1.-aprila-2012-posledna-novela.html

[16] Available at: www.fmed.uniba.sk/fileadmin/user_upload/admin/Veda-vyskum/zdravotna_starostlivost