Ladislav Andrášik

KULTIVÁCIA EKONOMICKEJ IMAGINÁCIE EXPERIMENTOVANÍM VO VIRTUÁLNYCH LABORATÓRIÁCH

(Demonštrácia na prípade Cournotovho duopolu, keď sa hráči správajú adaptívne)[1]

Abstract: *Development of global knowledge society accompanied by crises in national economies, as well as by the world economic crisis makes the economics science face new challenges. These challenges are in the first place those new phenomena and processes that may be pertinently described with the attribute of "all-round". In this new situation it is impossible to rely purely on conventional approaches. Instead, it is necessary to search for tools that are capable of raising economic imagination to a higher level. These methods and tools also include advanced ICT and in particular applied informatics and computation intelligence products. By means of them, we can construct virtual laboratories and experiment in them in order to find hidden qualitative properties of mental models, which are created by economists beyond the economic reality. For the purposes pursued in the present study, we have decided to use the mental model which was designed and developed into its mathematical form by A. A. Cournot by the end of the first half of the 19th century. We have supplemented this model with the change in players' behaviour in the sense that the players behave in an adaptive way, i.e. flexibly. This kind of modification of the classic duopoly is most suitable for demonstrating the phenomenon that even quite simple mental models may contain latent, at first sight unsuspected complexities. As a result, we have to be even more careful when dealing with more complex mental models constructed beyond the present-day economic reality. The investigation of a modified Cournot type of model populated with a pair of adaptive players poses relatively high demands on an analyst's mathematical skills despite its seeming simplicity. Moreover, nor a highly sophisticated mathematical analysis renders such obvious results, which would display adequately clearly and exhaustively specific properties of this kind of model. On the other hand, to achieve a sound understanding of market processes this kind of knowledge is very significant as well as relevant and useful. Given the contemporary high standard of information sciences and software engineering, or when we have at disposal advanced products of computation intelligencie (CI), there are reasonable possibilities for experimenting in virtual laboratories, which do not place high demands on more extensive preliminary skills for this activity at a PC. Potential means that enable us to construct*

[1] Autor ďakuje anonymným recenzentom za podnetné pripomienky a návrhy, za finálnu verziu state však preberá zodpovednosť sám.

virtual laboratories for tasks of this type, including also the Cournot model, include the following programs: STELLA, Vensim, SWARM Simulink in MATLAB, and some other. In the present case we have used iDmc program, which was designed in the programming language of LUA, and it runs in JAVA environment. The program is advantageous for most econonomists as it is freely accessible and downloadable from the Internet, and its author provides also free-of-charge detailed instructions how to experiment with it to economists, who, apart from their knowledge of economics, may not have parallel informatics knowledge and skills needed for these programming activities. The aim of the present paper is to familiarise the reader of the Economic Review with possibilities of unconventional acquiring of economic knowledge by these methods, namely on the instance of the well-known Cournot duopoly model, when players behave in an adaptive way (flexibly) rather than responding by adjustment as Cournot supposed.

Keywords: *border-collision bifurcations, closed invariant curves, Cournot duopoly and adaptive behaviour, focus, isoelastic demand function, local and global bifurcations, local and global crises, Neimark-Hopf and Neimark-Sacker bifurcations, node, multistability, saddle*

JEL: C 15, C 62, D 24, D 43

Úvod

Zvláštny, kostrbatý vývoj mnohých národných ekonomík, ako aj svetovej ekonomiky ako celku je v dnešnej dobe pre ekonómov z rôznych uhlov ich pohľadu v každom takom prípade veľkou výzvou. Príčiny nových a veľmi komplikovaných javov sú mnohoraké, ale väčšinou tak či onak súvisia jednak so vstupom ľudstva do globálnej vedomostnej éry akcelerovanej prudkým rozvojom IKT, a na druhej strane, avšak nie izolovane, od prvej príčiny, je to nedokonalá, ba priam chybná konštrukcia menovitých monetárnych[2] a fiškálnych systémov, ktoré generujú zárodky bifurkácií, vedúce ekonomiky na hranu alebo aj priamo do deterministického chaosu viacerých typov. Úlohu komplikuje aj to, že do deja vstupujú ďalšie premenné, ktoré nevieme presne identifikovať, takže si treba vypomôcť tak, že sa považujú za náhodné udalosti. Touto komplikáciou sa však v tejto stati nebudeme zaberať, pretože náš cieľ je skromnejší a zameriavame sa iba na demonštráciu toho, že aj na pohľad jednoduché mentálne modely môžu vykazovať pomerne komplexné modusy správania. Pre uvedený účel sme sa rozhodli použiť mentálny model, ktorý koncom prvej polovice 19. storočia vytvoril a sformuloval do matematickej podoby A. A. Cournot. Doplnili sme ho o zmenu správania sa hráčov tak, že sa v modifikovanej verzii správajú adaptívne. Takáto úprava klasického modelu duopolu sa dobre hodí

[2] V danej súvislosti možno uviesť typický prípad chybnej konštrukcie, a to prípad zavedenia monetárnej únie v podobe spoločnej meny pre ekonomicky nerovnako rozvinuté členské krajiny EÚ. Tento politický voluntaristický akt založil zárodky pre viaceré vopred nepredvídané poruchové režimy, ktoré majú potenciu generovať sklony k autolikvidácii celého tohto nevydareného monetárneho systému.

na demonštráciu tých vlastností pomerne jednoduchých mentálnych modelov, ktoré pri konvenčnej analýze niekedy zostávajú skryté, alebo si ich nájdenie vyžaduje sofistikované matematické postupy. Takto upozorňujeme na potrebu veľkej opatrnosti pri zaobchádzaní s komplikovanejšími mentálnymi modelmi konštruovanými nad súčasnou ekonomickou realitou.

Vyšetrovanie modifikovaného modelu Cournotovho typu osadeného dvojicou adaptívnych hráčov je dosť náročné na matematickú zručnosť analytika napriek svojej zdanlivej jednoduchosti. Navyše, ani vysoko sofistikovaná matematická analýza nedáva také zreteľné výsledky, ktoré by dostatočne názorne a vyčerpávajúco preukázali špecifické vlastnosti takého modelu. Na druhej strane, pre dobré porozumenie trhovým procesom je také poznanie pre ekonomické subjekty veľmi dôležité a aj patrične užitočné. Pri súčasnej rozvinutosti informačnej vedy a softvérového inžinierstva, resp., keď sú k dispozícii pokročilé produkty komputačnej inteligencie[3] (CI – Computational Intelligence), existujú solídne možnosti na experimentovanie vo virtuálnych laboratóriách, ktoré nie je veľmi náročné na rozsiahlejšie predbežné zručnosti v takejto činnosti na PC. Medzi potenciálne prostriedky, ktoré umožňujú konštruovať virtuálne laboratóriá pre úlohy takého typu, ako je aj Cournotov model, patria programy STELLA[4], Vensim, SWARM Simulink v MATLAB-e a niektoré ďalšie. V danom prípade sme použili program iDmc, ktorý bol vytvorený v programovacom jazyku LUA a beží v prostredí JAVA. Veľkou výhodou pre bežného ekonóma je aj to, že je voľne prístupný a teda aj downloudovateľný z internetu, pričom jeho tvorca bezodplatne poskytuje aj podrobné návody na experimentovanie pre ekonómov, ktorí popri vlastnej ekonomickej pripravenosti nemajú paralelné informatické vedomosti a zručnosti potrebné na takéto programátorské zručnosti a činnosti. Cieľom tohto príspevku je priblížiť čitateľovi Ekonomických rozhľadov možnosti nekonvenčného získavania ekonomických vedomostí spomenutými postupmi, a to práve na príklade známeho Cournotovho modelu duopolu, keď sa hráči správajú adaptívne a nekonajú v režime okamžitej adjustačnej reakcie, aký predpokladal A. Cournot. Inak povedané, cieľom nie je číra demonštrácia Cournotovho duopolu, ktoré tu vystupuje len ako vzorové médium, ale demonštrácia možností experimentovania vo virtuálnych laboratóriách pre kultiváciu imaginácie zdokonalenia a teoretizovania sprostredkované týmto médiom.

V prvom odseku state uvádzame čitateľa stručne do problematiky a formulujeme verbálny mentálny duopol. V druhom odseku tento primordiálny model formalizujeme do podoby 2D diferenčnej sústavy, a tú premieňame na topologickú projekciu (resp. mapu). S touto mapou potom vykonávame niektoré matematické operácie,

[3] Tak ako v našich skorších publikáciách aj tu uprednostňujeme tento termín pred starším termínom *umelá inteligencia* (AI – Artificial Intelligence), pretože v súčasnej vede existujú snahy tvoriť umelú inteligenciu aj na inej než komputačnej osnove.

[4] Veľkou prednosťou STELLY je možnosť vedenia intermediovaného dialógu ľudského subjektu s evolvujúcim príbehom na digitálnej scéne (mediovaný *story-telling*), t. j. s komputačným subjektom (softbotom, myslitom) cudzieho tvorcu. Ešte väčšou prednosťou je, že poznávací subjekt môže konštruovať svoje vlastné autentické scény, zasadzovať do nich príbehy (resp. scenáre), t. j. osobne vytvorený softbot, a režírovať ich jednak pre svoje poznávacie potreby, ale aj pre tretie osoby. Takto sa môžu efektívne prekonávať nedostatky *inštruktívneho poznávacieho procesu* zavedením *tvorivej konštruktívnosti* do imaginácie subjektu.

ktoré majú slúžiť ako referenčné útvary na demonštráciu iných možností, ktoré ponúkajú experimenty vo virtuálnych laboratóriách. V treťom odseku konštruujeme na základe vyššie uvedenej mapy virtuálne laboratóriá v prostredí iDmc a vykonávame viaceré experimenty, z ktorých výstupy používame na demonštráciu prítomnosti neregulárnych kvalitatívnych útvarov a konvenčnými postupmi nepredvídaných udalostí v evolúcii modelu. V poslednom odseku identifikujeme dosiahnuté výsledky a ukazujeme na ich prínosy pre kultiváciu ekonomickej imaginácie a teoretizovania, ale aj nedostatky a slabé miesta tohto prístupu.

Teória a konvenčný model duopolu, jeho transformácia na adaptívne správanie sa hráčov

Originálnym tvorcom teórie a matematického modelu duopolu bol francúzsky matematický ekonóm A. A. Cournot. Jeho produkt považujeme v tejto stati za zárodočný a nazývame ho *primordiálnym modelom duopolu*. A. Cournot zameral svoju pozornosť na dvoch producentov, ktorí prichádzajú na trh s rovnakým (z hľadiska užitočnosti pre spotrebiteľa homogénnym) produktom. Ich konkurenčná schopnosť je závislá od schopnosti produkovať určitý objem homogénneho produktu a od veľkosti marginálnych nákladov, ktoré pritom vznikajú. Predpokladá sa, že *funkcia dopytu má izoelastickú vlastnosť* , t. j. $Q^D = 1/p$, čo vedie na druhej strane k tomu, že cena sa utvára v nepriamej úmere k celkovej ponuke produktu (čistenie trhu si vyžaduje rovnosť Q^D a Q^S, pričom $Q^S = x + y$, t. j. súčet oboch objemov produkcie hráčov H_1 a H_2). Keďže celkovú ponuku tvoria výrobné rozhodnutia dvoch rozličných subjektov (vlastne hráčov), ktoré oneskorene reagujú na rozhodnutia svojho protivníka, môžeme tento aspekt modelu vnímať aj ako príklad analogický *ekologickej konkurencii* a tiež *teórii hier*[5]. Z toho aj intuitívne vyplýva dôležitosť nielen celkového objemu, ale aj pomeru objemov oboch producentov, takže charakter procesu možno označiť dvoma znamienkami mínus. Uvedenú situáciu názorne predstavuje *graf reakčných kriviek* (obr. č.1), ktorých priesečníkom je tzv. *Cournotov bod*, v literatúre o duopole často nesprávne označovaný za bod rovnováhy[6]. Ide o to, že tento model je typickým predstaviteľom diskrétnych procesov, takže ide o jeden z fixných bodov, ktorý síce môže mať atraktívnu vlastnosť, ale to nevylučuje aj iné kvalitatívne možnosti, ktoré sa objavia najmä keď zavedieme inú adjustáciu objemov, ako je priama reakcia na pozorovanú cenu bez anticipácie jej zmeny. A to je práve to, čo nás na tomto jednoduchom modeli dvoch výrobcov V1 a V2 zaujíma.

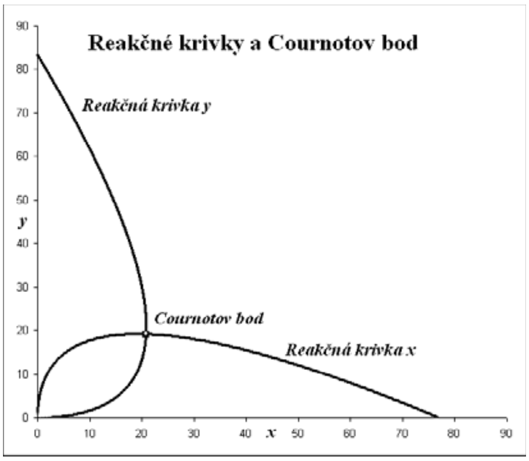
---

[5] Stojí za pozornosť, že A. Cournot vlastne výrazne predbehol zakladajúcich teoretikov *ekologickej konkurencie*, totiž amerického biológa a štatistika A. Lotku a talianskeho matematika V. Volterru, ktorí nezávisle od seba študovali v prvej tretine minulého storočia *ekologické vzťahy* medzi dvoma prírodnými populáciami. Je tu však ešte aj iná pozoruhodná súvislosť, a to teória hier, ktorej pôvodným tvorcom bol J. von Neumann a potom v spoluautorstve s O. Morgensternom dopísali v januári 1943 a v roku 1944 aj vydali preslávenú monografiu *Theory of Games and Economic Behavior* [21]. (Podotýkame, že tretiu dotlač tejto knihy priniesol z USA významný slovenský ekonóm Š. Heretik, čo bol v tých časoch významný príspevok pre ekonomickú teóriu u nás.

[6] Formálne je Cournotov bod podobný rovnováhe v *teórii hier*. Matematický dôkaz rovnováhy v teórii hier podal nositeľ Nobelovej ceny J. Nash [19], [20]. Súčasná teória diskrétnych dynamických systémov preferuje namiesto rovnováhy pojem „fixný bod".

Obr. č.1

Konvenčné kreslenie reakčných kriviek duopolu



Demonštrácia zjednodušeného matematického prístupu k adaptívnemu duopolu

Z primordiálneho mentálneho modelu, ako sme vyššie naznačili, vyplýva, že cena je recipročná k celkovému dopytu[7]. Ak nám záleží na „čistení trhu“, tak dopyt a ponuka sa musia navzájom rovnať (teda ide o rovnosť, a nie rovnováhu). Keď označíme cenu symbolom *p* a objemy dodávané na trh symbolmi *x* a *y,* získame rovnicu ceny ako zlomok

$$p = \frac{1}{x+y} \quad . \tag{1}$$

Treba si, samozrejme, uvedomiť, že vzťah (1) môže byť ekonomickým aj matematickým nezmyslom, ak totiž $x = y = 0$. V tom prípade by sme totiž delili čitateľa nulou. V uvažovanom modeli sú aj iné absurdity vznikajúce v krajnostiach, ale nad to sa možno povzniesť, pretože sú v dobrej viere irelevantné pre analýzu. Musíme jednoducho predpokladať, že objemy produktov a hodnoty marginálnych nákladov, ktoré označíme symbolmi *a* a *b,* nesmú nadobudnúť nulové hodnoty. Ak poznáme hodnoty koeficientov marginálnych nákladov *a* a *b*, potom môžeme sformulovať zisky oboch firiem takto

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \frac{x}{x+y} - ax \\ V(x,y) &= \frac{y}{x+y} - by \end{aligned} \quad . \tag{2}$$

[7] V modeloch duopolu sa používajú aj iné funkcie dopytu. Daný typ sme použili pre jeho zrozumiteľnosť aj preto, že sa v literatúre bežne vyskytuje.

Po parciálnych deriváciách a ich položením za rovné nule, t. j. $\partial U / \partial x = 0$ a $\partial V / \partial y = 0$ možno pre x a y vypočítať a po úpravách dostať rovnice reakčných funkcií. To sú tie, ktorými sa aj v dnešných učebniciach uvádza pôvodný model Cournota, najčastejšie v podobe 2D sústavy diferenčných rovníc

$$x_{t+1} = \sqrt{\frac{y}{a}} - y$$
$$y_{t+1} = \sqrt{\frac{x}{b}} - x \tag{3a}$$

resp. s úpravou pre zamýšľané zavedenie koeficientu adjustácie

$$x_{t+1} = x + \sqrt{\frac{y}{a}} - y - x$$
$$y_{t+1} = y + \sqrt{\frac{x}{b}} - x - y \quad . \tag{3b}$$

Sústava (3) však formalizuje model len pre jedinú trajektóriu vychádzajúcu z jedinečného začiatočného bodu o súradniciach (x_0, y_0). Súradnice Cournotovho bodu x_C a y_C, t. j. obe množstvá tovaru vypočítame, ak zoberieme vzťahy (3) ako simultánnu sústavu rovníc

$$x = \frac{b}{(a+b)^2},$$
$$y = \frac{a}{(a+b)^2}. \tag{4}$$

Zisk duopolistov v Cournotovom bode potom vypočítame spätným dosadením vzťahov (4) do sústavy (2) a tak získame zisky

$$\Pi_1 = \frac{b^2}{(a+b)^2}, \qquad \text{a zisk pre druhú firmu} \quad \Pi_2 = \frac{a^2}{(a+b)^2}. \tag{5}$$

Ďalej predpokladáme (spolu s predpokladmi, ktoré zaviedol T. Puu [22]), že každá firma sa zhoduje v každej inštancii času s tou druhou, pokiaľ ide o zvolenú ponuku. Aby sme neboli závislí len od jedinej trajektórie a aby sme teda mohli preskúmať úplnú spojitú množinu potenciálnych začiatočných bodov všetkých možných trajektórií, teda spojitý štvorec $x \times y$, musíme použiť iný matematický prístup, a síce topologickú projekciu, čiže mapu[8],

[8] V našich prácach používame a trváme na používaní tohto medzinárodne ukotveného pojmu aj v tejto stati, hoci to nie je celkom v súlade so slovenskou matematickou terminológiou. Tento pojem však zabezpečuje jasnú medzinárodnú intersubjektivitu.

$$M: \begin{cases} x' = x + \sqrt{\dfrac{y}{a}} - y - x \\ y' = y + \sqrt{\dfrac{x}{b}} - x - y, \end{cases} \tag{6}$$

kde sme namiesto spodného indexu $t+1$ použili apostrof „ ′ “, a budeme to používať aj ďalej, premenné x a y sú množstvá homogénneho tovaru dodávané duopolistami na trh, a parametre a, a b sú ich *konštantné marginálne náklady*. Zo vzťahov mapy (6) jasne vyplýva, že dodávky na trh sú závislé jednak od veľkostí dodávok a ich pomeru v predchádzajúcom období, a najmä od pomeru medzi marginálnymi nákladmi oboch konkurentov. To je dobrý dôvod na skúmanie vplyvu tohto podielu na evolúciu systému ako celku. Ak pomer a ku b označíme symbolom k, t. j. a sa zmení na k a b sa bude rovnať jednotke, potom mapa (6) sa zmení na

$$M^a: \begin{cases} x' = x + \sqrt{\dfrac{y}{k}} - y - x \\ y' = y + \sqrt{x} - x - y, \end{cases} \tag{7}$$

teda, ako sme uviedli, parameter b sme položili rovný jednotke, t. j. $k=a/1=a$. Modifikovanú mapu (7) sme použili na vytvorenie virtuálneho laboratória v prostredí iDmc, pričom sme zakázali záporné hodnoty premenných x a y. Výpis v programe LUA v Jave je uvedený v textovom bloku ďalšieho odseku. Vyššie sme však už povedali, že nám ide o adaptívne správanie duopolistov, t. j., že adjustácia na nezmenenú situáciu (krátkozraké správanie) nie je okamžitá, ale si vyžaduje určitý čas. To má za následok zmenu hodnoty ponúkaného množstva v súčine s jednotným adjustačným koeficientom a prípadne s rozdielnymi koeficientmi λ a μ. V prípade rozdielnych koeficientov sa 2D sústava diferenčných rovníc (3) zmení na sústavu

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x + \lambda\left(\sqrt{\frac{y}{a}} - y - x\right) \\ y_{t+1} &= y + \mu\left(\sqrt{\frac{x}{b}} - x - y\right) \end{aligned} . \tag{8}$$

Z pôvodnej 2D sústavy diferenčných rovníc (8), ktorá je, pravdaže, len formalizovanou verziou mentálneho modelu duopolu modifikovaného na adaptívne správanie hráčov, sme aj tentoraz vytvorili topologickú projekciu, resp. mapu v nasledujúcej (zámerne upravenej) verzii[9]

[9] Tento formalizmus adaptívneho duopolu sa v ostatných rokoch v literatúre objavuje pomerne často. K autorom, ktorí ho často používajú, patrí: A. Agliari, J.-I. Bischi, R. Dieci, L. Gardini, T. Puu, I. Suško a viacerí ďalší.

$$M^{adapt}: \begin{cases} x' = (1-a)x + a\left(\sqrt{\dfrac{y}{k}} - y\right) \\ y' = (1-b)y + b\left(\sqrt{x} - x\right) \end{cases}, \tag{9}$$

kde sme namiesto gréckych písmen λ a μ použili pre adjustačné koeficienty symbol *a* a *b*, aby sme to mali jednoduchšie pri tvorbe virtuálneho laboratória v iDmc.[10] Mapa (9) má dva fixné body, a to

$$\begin{aligned} O^* &= (0,0) \\ E^* &= \left(\frac{1}{(k+1)^2}, \frac{k}{(k+1)^2}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Ich stabilitu určíme obvyklým matematickým postupom. Zo zjednodušenej (položili sme $a = b$) mapy (9) M^{adapt} vypočítame jej derivovaním *Jakobiho maticu*[11]

$$J = \begin{bmatrix} (1-a) & a\left(\dfrac{1}{2\sqrt{ky}} - 1\right) \\ a\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) & (1-a) \end{bmatrix} \tag{11}$$

a z nej potom jej determinant takto

$$\begin{aligned} |J| = \det[J] &= \det\begin{bmatrix} (1-a) & a\left(\dfrac{1}{2\sqrt{ky}} - 1\right) \\ a\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) & (1-a) \end{bmatrix} = \\ &= (1-a)^2 - a^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{ky}} - 1\right) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Zo získaného determinantu vyjadríme premennú *y* ako

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4k}\left(\dfrac{a^2\left(2\sqrt{x} - 1\right)}{4a\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - a^2}\right)^2 \\ 0 \le x \le \dfrac{1}{4} \end{cases} \tag{13}$$

[10] Softvér iDmc neumožňuje používanie gréckej abecedy.

[11] Pripomíname, že sme vyššie zaviedli rovnosť a = b.

Na preskúmanie stability fixného bodu E^* použijeme Jakobiho maticu[12]

$$J^* = \begin{bmatrix} 1-a & a\dfrac{1-k}{2k} \\ b\dfrac{k-1}{2k} & 1-b \end{bmatrix}, \tag{14}$$

z tejto matice utvorenej z mapy T možno odvodiť podmienky stability sústavy takto:

$$\begin{aligned} &\text{a) } 1 - stopa(J^*) + \det(J^*) = \frac{1}{4k}(k+1)^2 ab > 0 \\ &\text{b) } 1 + stopa(J^*) + \det(J^*) = 2(2-a-b) + \frac{ab(k+1)^2}{4k} > 0 \\ &\text{c) } 1 - \det(J^*) = a + b - \frac{ab(k+1)^2}{4k} > 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Predpoklad

Na rozlíšenie ad hoc voľby adjustačného koeficientu a = b od vypočítanej sme zvolili symbol λ. Ak λ = a = b < 1, potom v každom priesečníku krivky

$$\lambda = \frac{8k}{(k+1)^2} \tag{16}$$

sa nachádza Neimarkova-Hopfova (-Sackerova[13]) bifurkácia subkritického typu.

Dôkaz

V prípade, že $a = b$, *charakteristický polynóm* Jakobiho matice J^*, ktorý označuje *vlastné hodnoty* symbolom S, sa môže napísať ako

$$(S + \lambda - 1)^2 + \frac{1}{4k}(k-1)^2 \lambda^2. \tag{17}$$

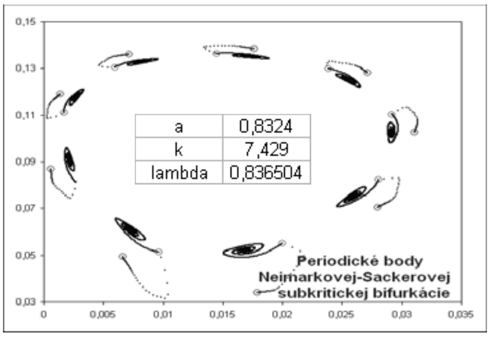
Možno odvodiť, že J^* má *komplexne konjungované vlastné hodnoty* pre každú λ a k. Modul takej vlastnej hodnoty je

$|S| = (1-\lambda)^2 + \dfrac{1}{4k}(k-1)^2 \lambda^2$, takže patrí do jednotkovej kružnice, ak je predpokladaná rovnosť (16) splnená. Ba čo viac, ak je $\lambda < 1$, potom $|S|^j \neq 1$, $j = 2,3,4$.

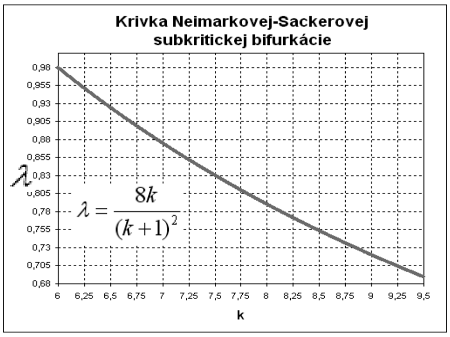
[12] Prípad s použitím a = b je jasnejší, ale prípad a ≠ b prináša viac poznatkov o evolúcii duopolného trhu.

[13] *Neimarkova-Sackerova bifurkácia* vedie k vzniku uzavretej invariantnej krivky (UIK) z fixného bodu (ktorý tým stratil stabilitu a stal sa repelentným bodom) v diskrétnych dynamických systémoch (iterované projekcie, resp. mapy, ktoré stratili svoju stabilitu v dôsledku toho, že pár vlastných hodnôt v komplexnom odbore má jednotkový modul. Táto bifurkácia môže byť tak subkritická (repelentná UIK), ako aj superkritická (atraktívna UIK), vo vnútri 2D invariantnej (-ného) variety (manifoldu). *Neimarkova-Hopfova bifurkácia* sa týka spojitých dynamických systémov.

Obr. č. 2



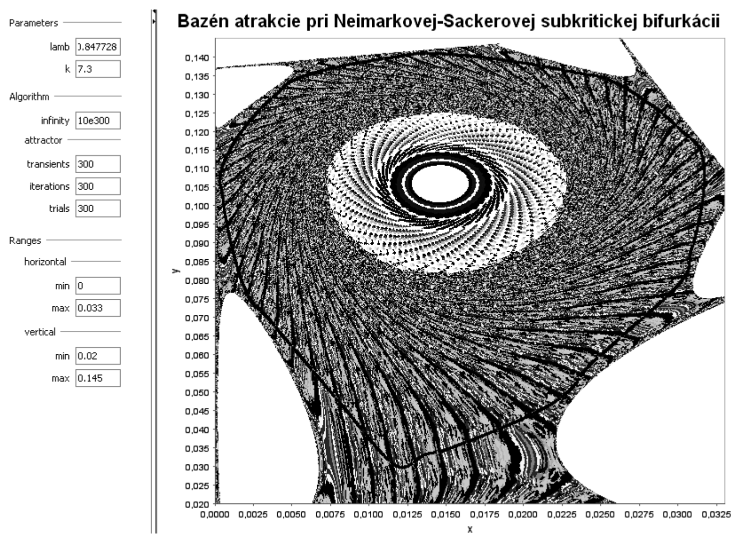
Obr. č. 3



Snímky sme vytvorili v Exceli.

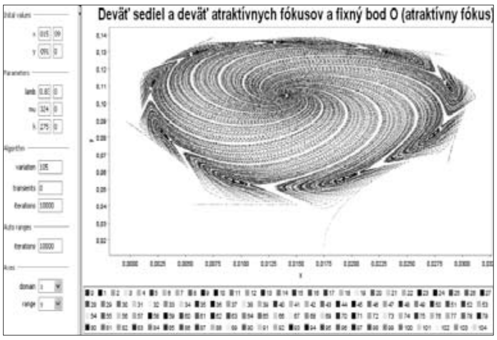
Obr. č. 4

Použitie rutiny „Basin of attraction" v iDmc



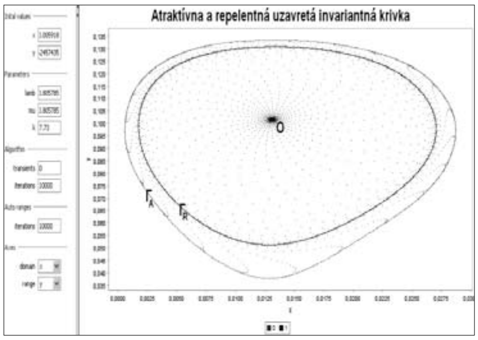
Obr. č. 5

Variovanie začiatočnými bodmi rekurzov



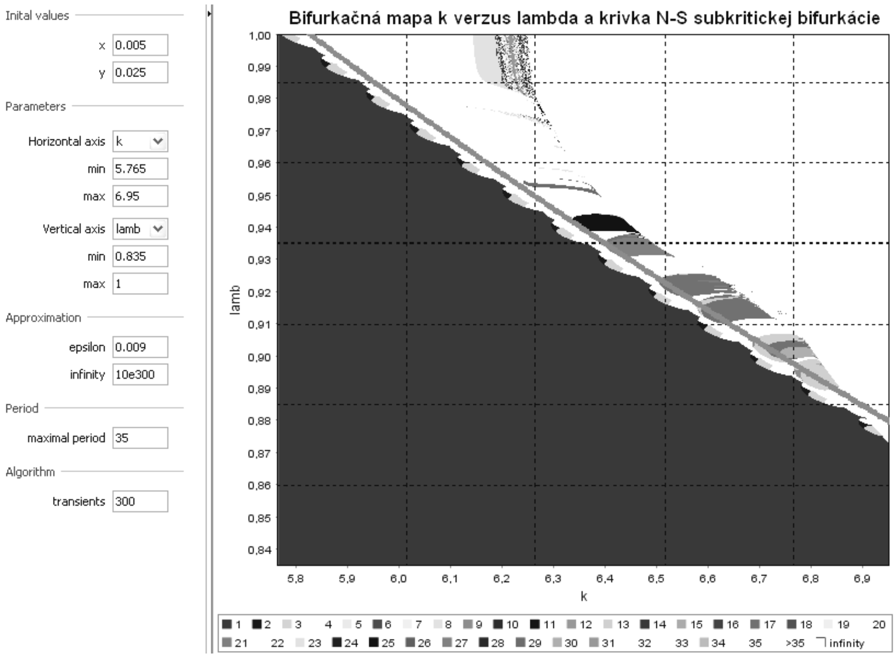
Obr. č. 6

Nájdenie kriviek variovaním začiatočných bodov rekurzov



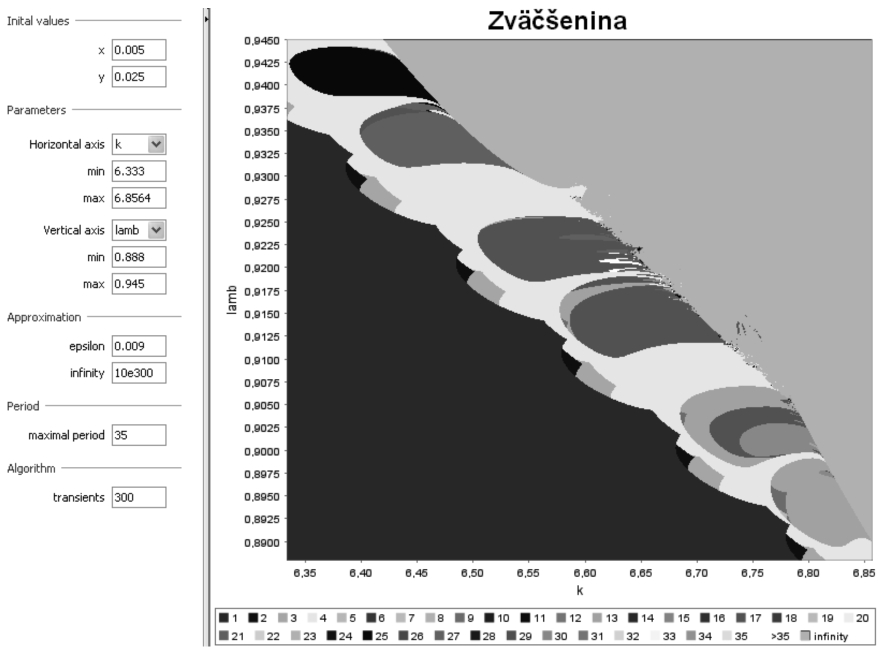
Obr. č. 7

Bifurkačný portrét variovania tromi parametrami



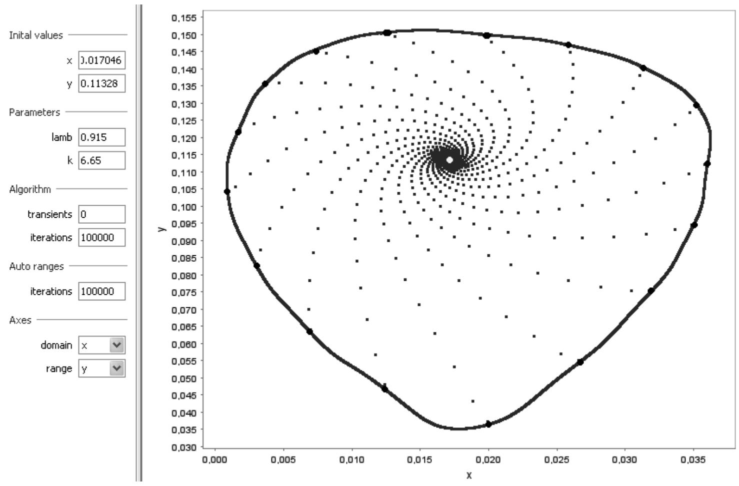
Obr. č. 8

Využili sme možnosť nastaviť presnejšie vykreslenie oblasti záujmu



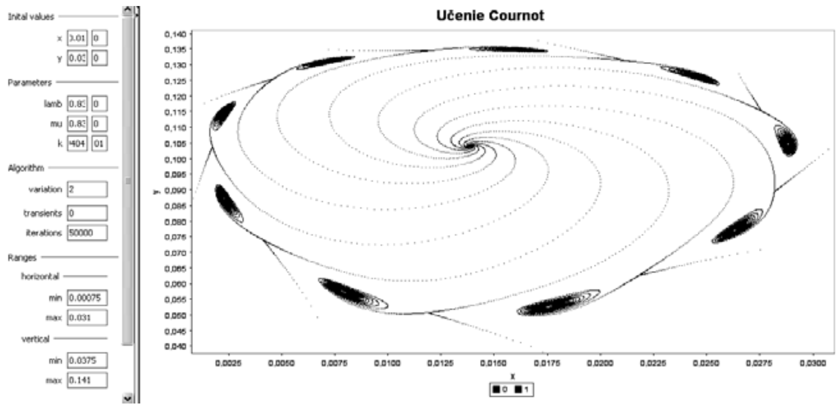
Obr. č. 9

Sedemnásť sedlovo-uzlových bodov na UIK



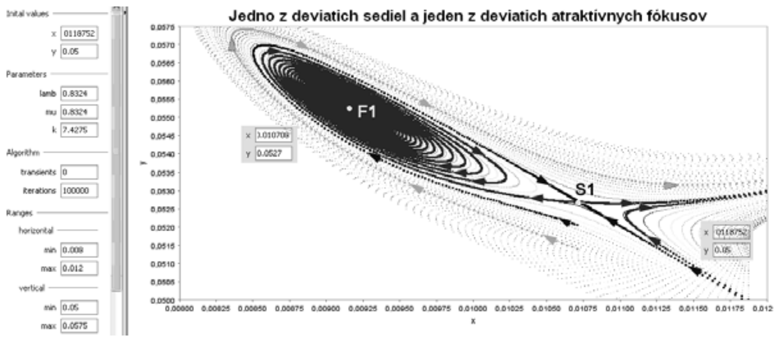
Obr. č.10

Deväť sediel a deväť atraktívnych fókusov



Obr. č.11

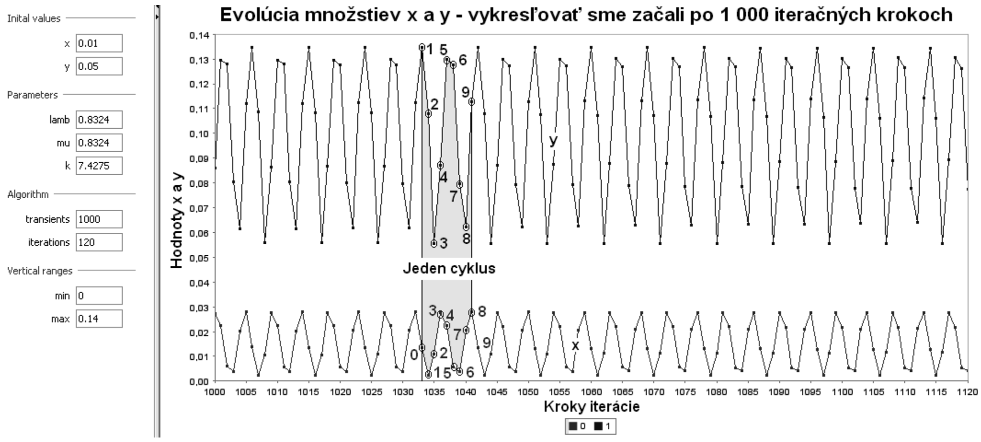
Deväť sediel a deväť uzlov v modeli adaptívneho duopolu (detail)



Stavový bod po dosiahnutí *periodického bodu-atraktívny fókus* ďalej už rotuje v deviatich diskrétnych krokoch ležiacich nehybne na orbite. Možné je však aj to, že stavový bod ukončí svoju púť vo fixnom bode *O*. To, či bude rotovať stavový bod na orbite alebo skončí vo fixnom bode *O* závisí od začiatočného bodu iteračnej trajektórie.

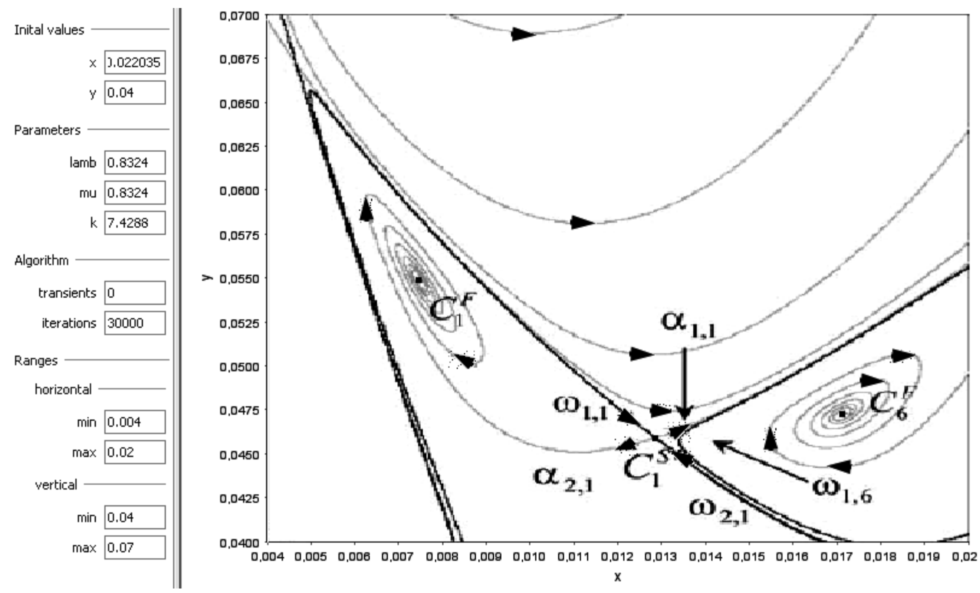
Obr. č. 12

Časovo-krokové trajektórie x a y



Obr. č. 13

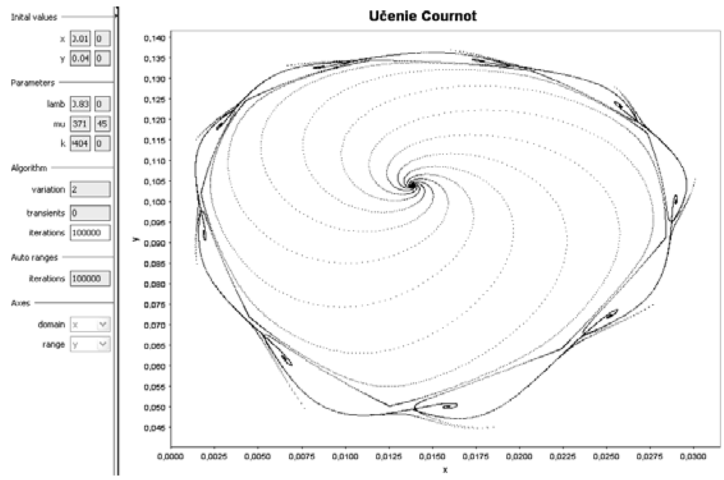
Označenie vetiev sedla symbolmi – pre repelentné a pre atraktívne vetvy



Vonkajšia trajektória ukazuje snahu systému udržať sa na uzavretej invariantnej krivke, ale príťažlivá sila ľavých fókusov sa ukáže ako silnejšia než príťažlivosť krivky. Vzniká nová bifurkačná situácia, keď systém nekonverguje hneď k prvému fókusu vľavo, ale obieha po krivke a skonverguje sa k nasledujúcemu alebo až k niektorému, v poradí ďalšiemu z fókusov v závislosti od toho, nakoľko blízko sa zvolená hodnota parametra μ nastaví voči bifurkačnej hodnote invariantnej uzavretej a príťažlivej krivky. Pri veľkom priblížení sa k bifurkačnej hodnote môže systém vykonať aj viac otáčok bez toho, aby sa začalo deväť periodických trajektórií navíjať na fókusy. Na snímke obr. č.15 vidíme opačnú situáciu, keď atraktívna sila fixného bodu *O* preváži silu fókusov a tie sa musia odmotávať, lebo sa zmenili na repelentné.

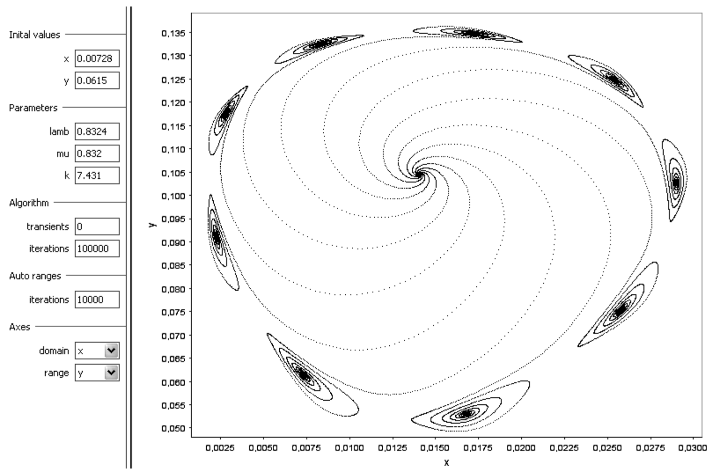
Obr.č. 14

Bifurkácia v blízkosti UIK



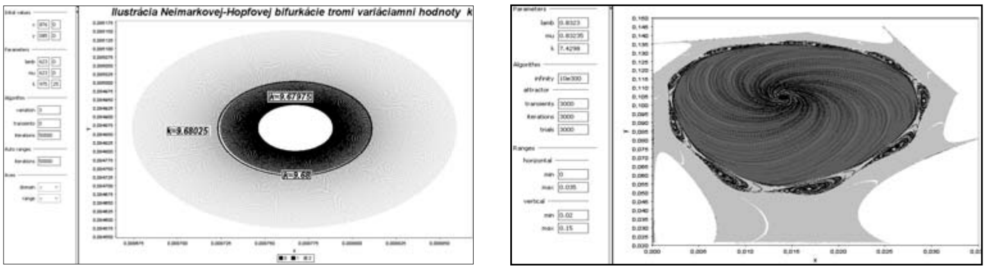
Obr. č. 15

Repelentné fókusy

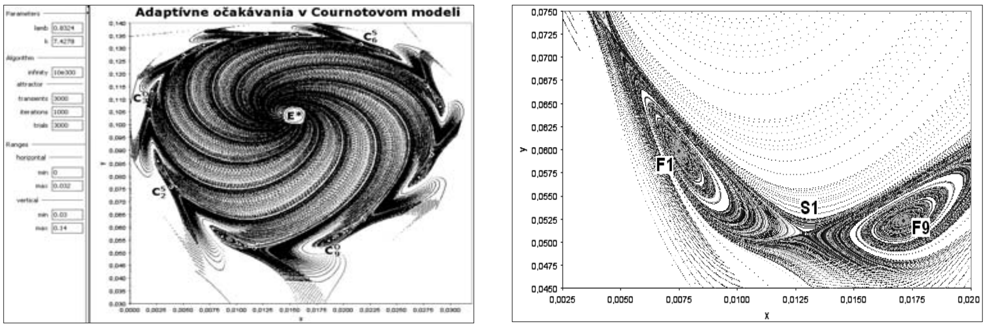


Uvádzame sériu dvanástich výstupov sinulačných experimantov na demonštráciu možností experimentovania vo virtuálnom laboratóriu skonštruovanom v iDmc (obr. č. 16-21) s využitím patričných rutín iDmc.

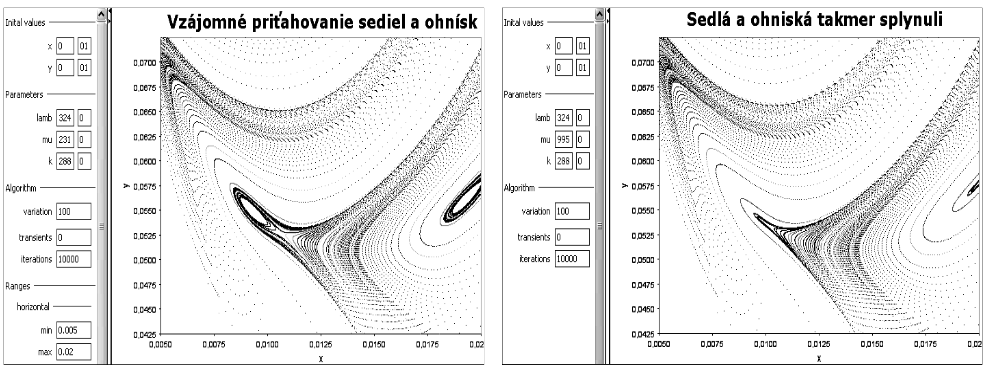
Obr. č. 16



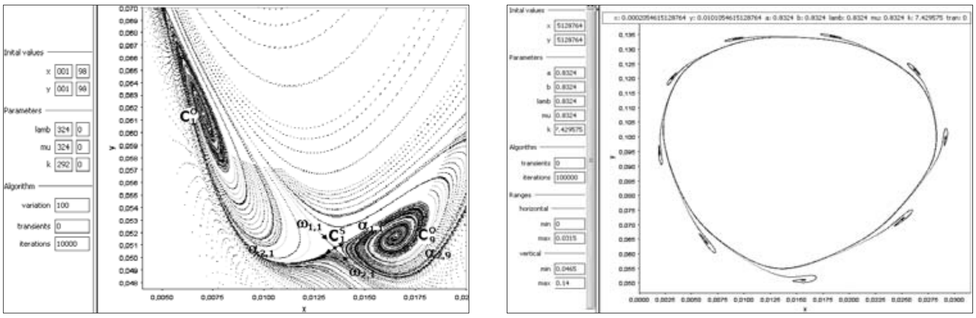
Obr. č. 17



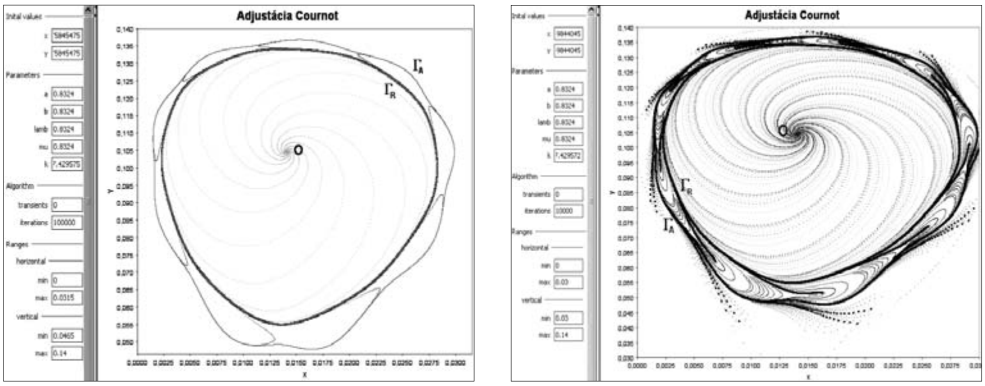
Obr. č. 18



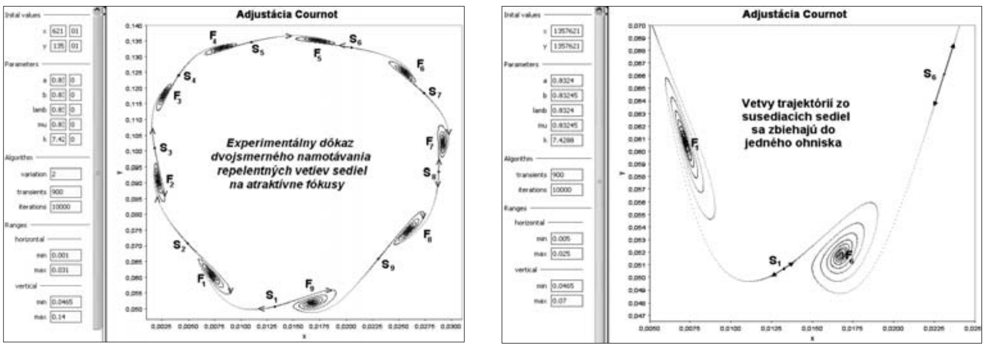
Obr. č. 19



Obr. č. 20

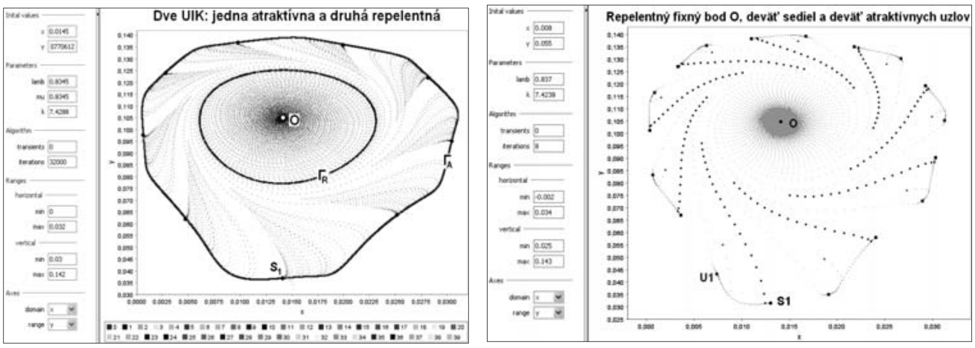


Obr. č. 21



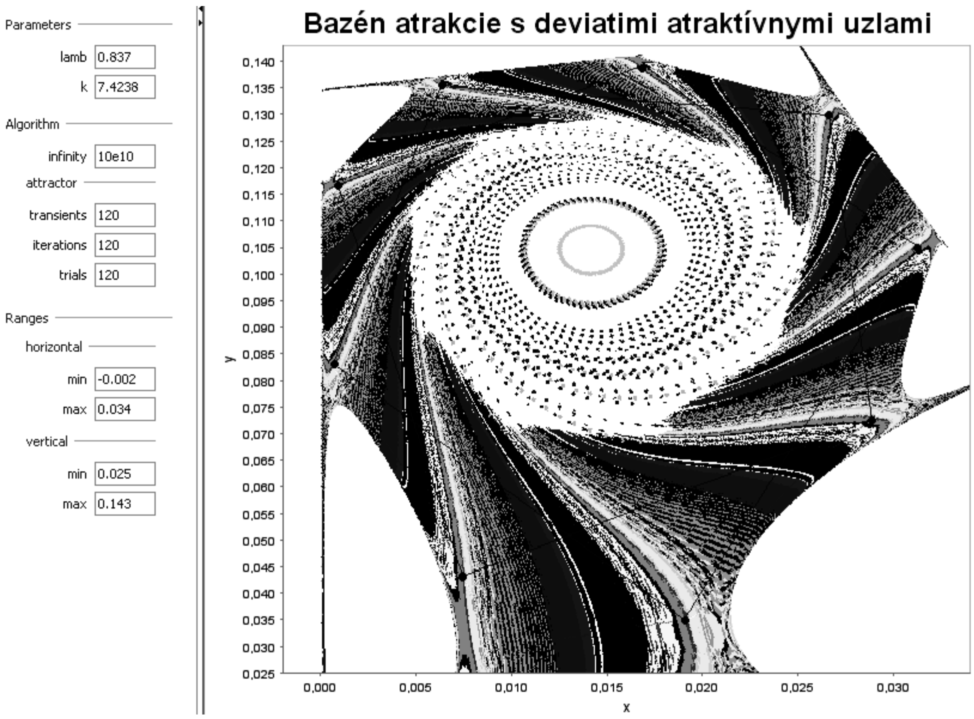
Obr. č. 22

Snímky z experimentov



Obr. č. 23

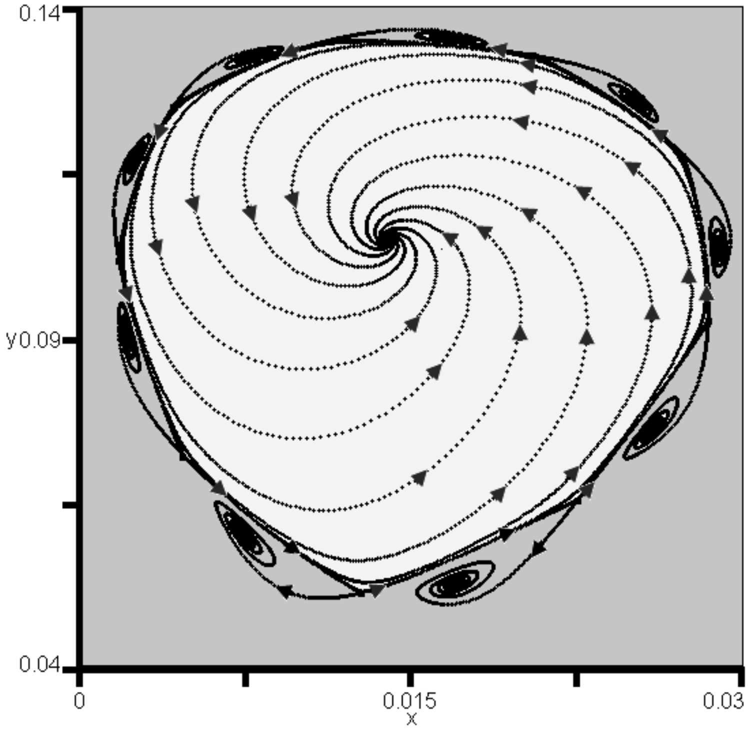
Rotácia stavového bodu na dvoch orbitách



Na obr. č. 23 je bazén atrakcie, na ktorý sme premietli deväť fixných bodov s vlastnosťou atraktívnych uzlov. Aby bolo vidieť, že ležia na dvoch orbitách, spojili sme ich čiarami, takže sme ilustrovali, že rotačné číslo systému je $\rho = 2/9$.

Obr. č. 24

Atraktívne fókusy, sedlá a atraktívny fixný bod



Snímku na obr. č. 24 sme získali experimentovaním vo virtuálnom laboratóriu, vytvorenom v prostredí softvéru STELLA.

Záver

Vhodným príkladom na ukázanie výhodnosti použitia simulačných modelov a experimentovania v nich pre lepšie pochopenie náročnejších úloh v ekonómii je klasický príbeh o protikladných rozdieloch medzi trhovými formami: - *čistou* a *monopolistickou konkurenciou*. Ako je známe, v prípade čistej konkurencie prítomnosť rozsiahlej množiny takmer rovnorodých firiem znemožňuje jednej firme efektívne pôsobiť na trhovú situáciu. V dôsledku toho manažéri vnímajú *cenu*, ktorá je objektívne daná situáciou na trhu, teda ako parameter pre rozhodovanie *charakteru exogénnej veličiny*. Takáto situácia sa dá celkom dobre vysvetľovať a možno jej porozumieť napríklad pomocou *kriviek dopytu a ponuky*. Treba však dodať, že len vtedy, keď tieto krivky majú vhodný tvar a navzájom vhodnú polohu v *súradnicovej sústave množstvo tovaru verzus cena*. Ide o to, že pri zložitejšom tvare kriviek a pri ich posune v súradnicovej sústave vznikajú problémy, ktoré sa nedajú len tak jednoducho vysvetliť a pochopiť. Inými slovami, aj tu si treba pomôcť experimentovaním v simulačnom laboratóriu. V predchádzajúcich odsekoch state sme také situácie predstavili a pokúsili sme sa ich vysvetliť alebo aspoň komentovať.

V prípade monopolu dominuje na celom trhu jediná firma. V dôsledku toho môže pôsobiť na cenu vo svoj prospech, avšak s prihliadaním na formovanie dopytu. Zložitejšia situácia nastáva, keď sú na trhu dvaja monopolisti. To je prípad slávneho *hlavolamu duopolu*, ktorý sformuloval v matematickej podobe slávny francúzsky ekonóm A. Cournot ešte roku 1838. Jeho problém živí záujem viacerých matematických ekonómov až do dnešných čias. V kontexte cieľov tohto príspevku nemožno vynechať prínos H. von Stackelberga, ktorý presne o sto rokov neskôr rozšíril Cournotov model na základe zahrnutia predpokladu, že každý konkurent sa môže usilovať o dosiahnutie pozície cenového vodcu.

Mnoho ekonómov trpí decepciou, že práve oni rozumejú tým najkomplikovanejším ekonomickým situáciám a príbehom. Príklady iste netreba uvádzať. V tejto stati sa snažíme ukázať, že to vo vedeckej komunite nie je korektné a zároveň varovať pred prílišnou sebadôverou pri výklade komplexných ekonomických javov a príbehov, pretože možno bez väčších ťažkostí dokázať jej neopodstatnenosť aj v oveľa jednoduchších situáciách, než sú súčasné krízové javy. V uvedenej súvislosti je iste paradoxné, že sklon takých relatívne jednoduchých dynamických systémov, ako je aj duopol, zostával veľmi dlhý čas nepovšimnutý a pozornosť na tieto jeho komplexity sa upriamila až celkom nedávno[14]. Napríklad s tým súvisí porozumenie javu a správania dané *homoklinickým zjednotením sedla*. Túto situáciu zobrazuje UIK utvorená splynutím vetvy stabilnej množiny sedlového cyklu s nestabilnou množinou toho istého sedla, takže sa sformuje uzavreté prepojenie medzi periodickými bodmi sedlového cyklu. Takáto *štruktúrne nestabilná situácia* spôsobuje bifurkáciu medzi dvoma kvalitatívne odlišnými spôsobmi dynamického správania: Na jednej strane tranzícia UIK neexistuje, kým na druhej strane existuje a môže mať homeomorfickú vlastnosť k cyklu (sedlovo-uzlové zjednotenie alebo kváziperiodické trajektórie) alebo nie (sedlovo-fókusové zjednotenie). Uvedený zvláštny bifurkačný mechanizmus oprávnene púta na seba pozornosť, pretože pomáha odhaľovať a azda aj odstraňovať prílišnú sebaistotu ekonómov pri interpretáciách súčasných procesov tak v národných ekonomikách, ako aj v globálnej vedomostnej ekonomike. Pojem sedla a znalosť dejov v jeho okolí pomáhajú odhaľovať a trochu aj hlbšie pochopiť niektoré komplexné druhy správania v spoločensko-ekonomických systémoch. Samozrejme, že ide vlastne len o podobenstvo, ktoré sa nesmie chápať príliš dôverčivo, určite to nie je návod na riešenie všetkých nedostatkov v ekonomickej imaginácii a už vôbec sa nemôže brať za panaceum na liečenie problémov v objektívnej spoločensko-ekonomickej realite. Za určitú metodologickú osvetu sa však považovať môže.

Literatúra

[1] AGLIARI, A. – GARDINI, L. – PUU, T.: Global lifurcations in duopoly when the Cournot point is destabilized via subcritical Neimark bifurcation.

[14] Pokiaľ je nám známe, otázky o jednoduchosti alebo zložitosti takých dynamických systémov, ako je duopol, si položil až koncom sedemdesiatych rokov minulého storočia D. Rand, o čom svedčí jeho stať [24].

[2] ANDRÁŠIK, L.: *Computational Qualitative Economics: Computational Intelligence-Assisted Building. Writing and Running Virtual Economic Theories*. In: *Computational Intelligence in Engineering,* I. J. Rudas, J. Fodor, J. Kacprzyk (Eds.), pp. 246-261, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.

[3] ANDRÁŠIK, L.: *Aplikovaná systémová dynamika a synergetika*. Vydavateľstvo STU Bratislava, 2010.

[4] ANDRÁŠIK, L.: Animated Selfcreative Economies. In: *Ekonomický časopis* č. 1/1997.

[5] ANDRÁŠIK, L.: Docile economy. In: *Ekonomický časopis* č. 8-9/1997.

[6] ANDRÁŠIK, L.: Dynamika transformácie. In: *Ekonomický časopis* č. 3/1995.

[7] ANDRÁŠIK, L.: Economy challenging the third millenium (The potency of a non-conventional modeling of the economy). In: *Ekonomický časopis*, 47 (5), 1999, s. 671.

[8] ANDRÁŠIK, L.: Experience with Digital Story-telling in Social Sciences Education, Proceedings of the 7th International Symposium on Computational Intelligence, Hungarian Fuzzy Association. Zborník príspevkov. Budapest, 2006.

[9] ANDRÁŠIK, L.: Kvalita transformácie. In: *Ekonomický časopis* č. 9/1995.

[10] ANDRÁŠIK, L.: Learning by Evolution (in an Artificial Economy). In: *Ekonomický časopis* č. 1/1998.

[11] ANDRÁŠIK, L.: Teória počítačového experimentovania v umelom hospodárstve. In: *Ekonomický časopis*, 52, č. 8/2004, s. 996.

[12] ANDRÁŠIK, L.: Umelé hospodárstvo: učenie evolúciou vo virtuálnom laboratóriu. Kognice a umělý život, VII. In: *Zborník príspevkov zo siedmeho ročníka Česko-Slovenského seminára venovaného kognitívnym vedám a umelému životu*, Smolenice, 28. – 31. mája 2007.

[13] ANDRÁŠIK, L.: Využitie kybernetiky a informatiky pri simulovaní ekonomických systémov. In: *Conference: Connections among cybernetics, informatics and artificial intelligence, 16th –19th September 2007*. Aquacity – Poprad. Zborník prednášok.

[14] ANDRÁŠIK, L.: Získavanie nových vedomostí z umelej ekonomiky a digitálny story-telling. Workshop – Znalostný manažment, 2007, Bratislava, 11. – 12. júna 2007. Zborník príspevkov.

[15] ANDRÁŠIK, L.: Virtual Laboratories as a Medium for Knowledge Acquisition in a Complex Problems, http://virtuni.eas.sk/rocnik/2008/pdf/fid001351.pdf

[16] ANDRÁŠIKOVÁ, A. – ANDRÁŠIK, L.: *Vzťahy ekologického typu v spoločenskom hospodárstve*. Bratislava, Vydavateľstvo STU, 2007.

[17] BERTRAND, J.: Théorie mathématique de la richesse sociale. In: *Journale des Savants 48* (1883), pp. 499-508.

[18] COURNOT, A.: *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses, Hachette*. Paris, 1838.

[19] NASH, J.: Equilibrium points in n-person games. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 36(1), pp. 48-49, 1950.

[20] Nash, J.: Non-Cooperative Games. In: *The Annals of Mathematics,* 54(2), pp. 286-295, 1951.

[21] NEUMANN VON, J.: & MORGENSTERN, O.: *Theory of Games and Economic Behavior*. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1967 (Third printing).

[22] PUU, T.: *Nonlinear Economic Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997, s.142.

[23] PUU, T. – AGLIARI, A. – GARDINI, L.: Some global bifurcations related to the appearance of closed invariant curves. In: *Mathematics and Computers in Simulation, 68*, pp. 201-219, Elsevier, 2005.

[24] RAND, D.: Exotic phenomena in games and duopoly models. In: *Journal of Mathematical Economics 5*, pp. 173-184, 1978.