Arnold Dávid
František Peller

ELASTICITA COBBOVEJ-DOUGLASOVEJ PRODUKČNEJ FUNKCIE

Abstract: *The aim of this article is to demonstrate a simple and easy mathematics related to some production functions. The statements relate to marginal analysis of basic economic functions, especially production functions.*

Key words: *economy, mathematics, price, revenue, optimalisation, elasticity*

JEL: C 2, D 1, D 2, D 4

1 Pojem a význam elasticity funkcie

Matematika svojou schopnosťou sledovať závislosti medzi premennými veličinami nadobudla zásadnú dôležitosť nielen v prírodných a technických odboroch, ale i v ekonomických disciplínach. Môžeme povedať, že rozvoj mnohých z nich bol podmienený i rozvojom matematiky. Naopak, tieto disciplíny a v ostatnom čase najmä ekonómia dávajú stále nové podnety pre rozvoj nových matematických teórií, resp. rozvoj už existujúcich. Pri svojej práci sa ekonóm stretáva s mnohými teoretickými problémami, ktorých riešenie môže mať značný praktický význam. Jedným z dôležitých fyzikálnych, ale i ekonomických pojmov je elasticita.

Elasticita je slovo gréckeho pôvodu a znamená pružnosť, ohybnosť, ale aj povoľnosť, poddajnosť. V mechanike sa za pružné pokladá teleso, ktoré sa pri pôsobení vonkajších síl deformuje a ktoré nadobúda pôvodný tvar, ak tieto sily prestanú pôsobiť. Pod deformáciou telesa sa rozumie pomerná zmena jeho rozmerov, napríklad pri tyči jej dĺžka.

Ak nejaká sila stlačí jeden meter dlhú tyč o jeden centimeter, tak tá istá sila stlačí tyč (s tými istými mechanickými vlastnosťami) dlhú 10 cm iba o jeden milimeter. V oboch prípadoch sa dĺžka tyče skráti o jedno percento.

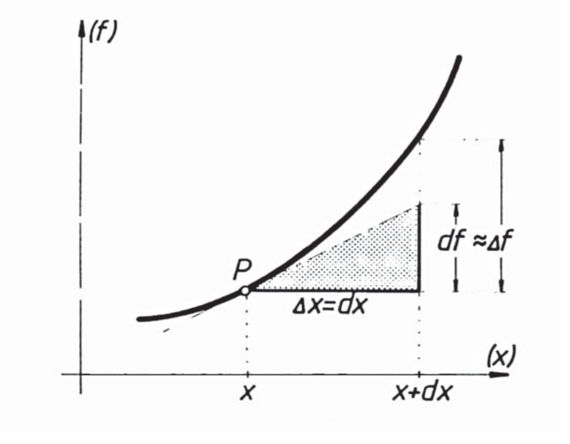
V oblasti funkcií ekonomickej analýzy pod elasticitou ekonomickej funkcie *f:y = f(x)* rozumieme číslo, ktoré udáva schopnosť závisle premennej *y* reagovať na zmeny nezávisle premennej *x*.

Derivácia funkcie sa definuje ako limita pomeru zmeny závisle premennej *y* k zmene nezávisle premennej *x*, pričom sa zmena nezávisle premennej *x* blíži k nule. Matematický zápis má tvar

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

V matematike sa zmena hodnoty funkcie *f* pri malej zmene jej premennej *x* o d*x* aproximuje hodnotou diferenciálu $df = f'(x) \cdot dx$. Pritom $f'(x_0)$ je hodnota derivácie funkcie f v bode x_0 (pozri obr. č. 1). Formálne môžeme písať deriváciu funkcie *f* ako podiel diferenciálov: $f'(x) = df/dx$.

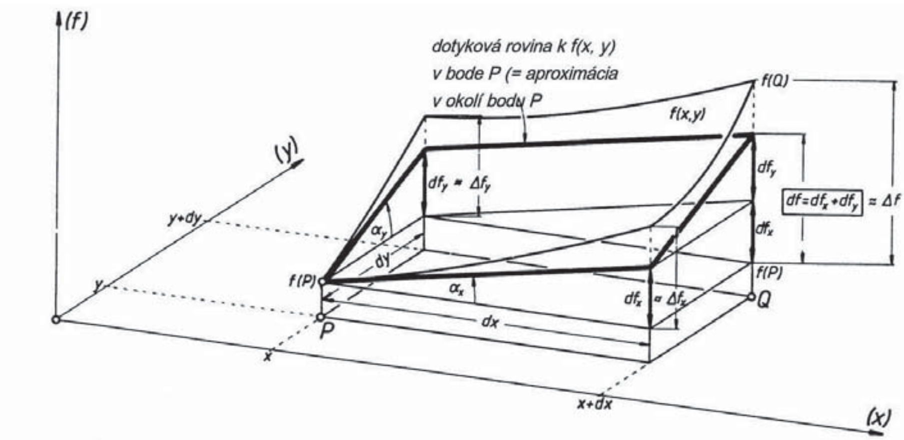
Obr. č. 1



Pri funkcii dvoch premenných *f(x, y)* treba brať do úvahy malé zmeny oboch premenných. Zmena hodnoty funkcie f sa aproximuje totálnym diferenciálom, ktorý má tvar

$df = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$. Symbol f'_x, resp f'_y je hodnota parciálnej derivácie funkcie *f* podľa *x*, resp. *y* v bode P o súradniciach (*x, y*) (pozri obr. č. 2).

Obr. č. 2



Pri funkcii n premenných $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ má totálny diferenciál tvar

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}.\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}.\mathrm{d}x_2 + \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}.\mathrm{d}x_n$$

Zmeny v definícii (1) sú absolútne, nie pomerné. Preto vypovedacia hodnota derivácie nie je pri aplikáciách vždy „stopercentná“. Ukáže to nasledujúci príklad.

Uvažujme funkciu dopytu $x(p) = -40p + 560$ v troch rôznych situáciách, pri ktorých sa zvýši cena vždy o 0,5pj/jm. Ukázalo sa nasledujúce (porovnaj tab. č. 1): vo všetkých troch prípadoch reagujú kupujúci na zvýšenie ceny o 0,50 pj/jm „rovnako“: znížia nákup o 20 jm.

Pri bližšom skúmaní pomerných (percentuálnych) zmien sa však ukáže, že tu v žiadnom prípade nejde o „rovnaké“ správanie sa.

Tab. č. 1

	(a)	(b)	(c)
Doterajšia cena *p*	1,00 pj/jm	7,00 pj/jm	13,00 pj/jm
Zmena ceny Δ*p*	**0,5 pj/jm**	**0,50 pj/jm**	**0,50 pj/jm**
Nová cena *p* + Δ*p*	1,50 pj/jm	7,50 pj/jm	13,50 pj/jm
Pomerná zmena	+50,0 %	+7,14 %	+3,85 %
Doterajšie množstvo *x*	520 jm	280 jm	40 jm
Zmena množstva Δ*x*	**–20 jm**	**–20 jm**	**–20 jm**
Nové množstvo *x* + Δ*x*	500 jm	260 jm	20 jm
Pomerná zmena	–3,84 % pokles množstva je menší ako rast ceny	–7,14 % pokles množstva je proporcionálny rastu ceny	–50,0 % pokles množstva je väčší ako rast ceny

ISSN 0323-262X ISSUE 2, ČÍSLO 2/2010

Zatiaľ čo v prípade (a) nastalo pomerne vysoké (50 %) zvýšenie ceny (z 1,00 pj/jm na 1,50 pj/jm), v prípade (b) pri zvýšení ceny zo 7,00 pj/jm na 7,50 pj/jm je to 7,14 % zvýšenie a v prípade (c) je to iba 3,85 % zvýšenie.

Niečo podobné sa stalo aj pri znížení nákupov o 20 jm. V prípade (a) sa nákup znížil o 3,84 % (zo základu 520 jm), v prípade (b) o 7,14 % (zo základu 280 jm) a v prípade (c) o 50 % (zo základu 40 jm).

Ale situácia, v ktorej kupujúci reaguje na 50 % zvýšenie ceny s 3,84 % znížením nákupu (prípad (a)) je iná, ako v prípade (c), keď kupujúci reaguje na 3,85% zvýšenie ceny s 50 % znížením nákupu. Prípad (b) ukazuje na „vyrovnanú“ reakciu: zvýšenie ceny, ako aj zníženie nákupu majú rovnakú odozvu (totiž 7,14 %). Iba stále rovnaké hodnoty absolútnych zmien (Δp = 0,5; Δx = –20) diferenciálneho podielu ($\mathrm{d}x/\mathrm{d}p$ = –40) vo všetkých troch prípadoch zvádzajú ku konštatovaniu o „rovnakom“ správaní sa pri zmenách.

Číselné hodnoty diferenciálneho podielu ako miera zmeny môžu viesť k nesprávnej interpretácii, pretože nič nehovoria o zmene východiskovej úrovne premenných.

Preto bude vhodné voliť takú mieru zmeny, ktorá odstráni tieto nedostatky. Je to elasticita funkcie.

2 Výpočet elasticity funkcie

Základná idea vedúca k odstráneniu spomenutých nedostatkov je v tom, že odteraz sa namiesto absolútnych zmien (napríklad Δx, Δp) dosadia do vzťahu (1) pomerné (alebo percentuálne) zmeny (napríklad $\Delta x/x, \Delta p/p$).

Príklad 1. Ak približne 50 % (= $\Delta p/p$) nárast ceny (porovnaj vyššie uvedený prípad (a) zapríčiní –3,84 % zníženie množstva, tak podiel

$$\frac{\text{relatívna zmena množstva}}{\text{relatívna zmena ceny}} = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{-3{,}84\%}{50\%} = -0{,}0768 \qquad (2)$$

dáva v priemere na jedno percento zmeny ceny pripadajúcu relatívnu zmenu ceny množstva: 1 % zvýšením ceny poklesne množstvo dopytu o (priemerne) 0,0768 %. Pomer (2) sa nazýva „elasticita x vzhľadom na p“.

Príklad 2. Pre funkciu dopytu $x(p) = -40p + 560$ (porovnaj tab. č. 1) dostaneme v prípadoch (a), (b), (c) s prihliadnutím na skutočnosť, že teraz x je závislá (a p je nezávislá) premenná, nasledujúce hodnoty elasticity množstva x vzhľadom na cenu p:

(a) $\varepsilon_{p,x} = \frac{-3{,}84\%}{50\%} = -0{,}0768$ (b) $\varepsilon_{p,x} = \frac{-7{,}14\%}{7{,}14\%} = -1$ (c) $\varepsilon_{p,x} = \frac{-50\%}{3{,}85\%} = -12{,}987$

ISSN 0323-262X ISSUE 2, ČÍSLO 2/2010

Vidno, že kupujúci v rôznych oblastiach funkcie dopytu reagujú na vždy 1 % zmenu rozdielne „prudko“: v prípade (a) klesne množstvo o menej ako 0,1 % („neelastický“ dopyt), v prípade (b) o práve 1 % („plynulý“ dopyt) a v prípade (c) temer o 13 % („elastický“ dopyt) (pozri tab. č. 1).

Definícia 1. Nech je daná funkcia $f\colon y = f(x)$. Ak sa v bode $(x; f(x))$ zmení nezávisle premenná x o Δx, tak sa hodnota f zmení o Δf. Pomer $\varepsilon_{f,x}$ relatívnych (percentuálnych) zmien $\Delta f/f$ a $\Delta x/x$

$$\varepsilon_{f,x} := \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

sa nazýva (oblúková) elasticita funkcie f vzhľadom na x v intervale $<x; x + \Delta x>$.

Oblúková elasticita sa pre analýzu elastického správania sa v ľubovoľnom bode oblasti definície javí ako nepraktická a neprehľadná. Je preto vhodnejšie, tak ako pri prechode od diferenčných podielov $\Delta f/\Delta x$ k diferenciálnym podielom $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$, prejsť aj pri pojme elasticity od diferenčných podielov $\Delta f/\Delta x$ k diferenciálom $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$. Takto dostaneme analogicky k definícii 1 pojem elasticity použiteľný v ekonomickej teórii, ktorý má prednosť jednoduchšieho výpočtu.

Definícia 2. Nech je f spojite diferencovateľná funkcia nezávisle premennej x. Potom sa pomer $\varepsilon_{f,x}$ relatívnych zmien $\mathrm{d}f/f$ a $\mathrm{d}x/x$ nazýva (bodová) *elasticita funkcie f vzhľadom na x* (v bode x):

.

$$\varepsilon_{f,x} := \frac{\frac{\mathrm{d}f}{f}}{\frac{\mathrm{d}x}{x}} \quad (x \neq 0; \quad f \neq 0) \tag{3}$$

Explicitný výpočet elasticity sa dostane jednoduchou úpravou vzorca (3) pomocou vzťahu $\mathrm{d}f = f'(x).\mathrm{d}x$ do tvaru

$$\varepsilon_{f,x} := \frac{\frac{\mathrm{d}f}{f}}{\frac{\mathrm{d}x}{x}} = \frac{\mathrm{d}f}{f}.\frac{x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.\frac{x}{f} = f'(x).\frac{x}{f(x)} \quad (x \neq 0; \quad f \neq 0)$$

$$\varepsilon_{f,x} = \frac{f'(x)}{f(x)}.x \tag{4}$$

ISSN 0323-262X ISSUE 2, ČÍSLO 2/2010

$\varepsilon_{f,x}$ je funkcia, takzvaná *funkcia elasticity*. Nezávislá premenná je na druhom mieste v indexe. $\varepsilon_{f,x} = \varepsilon_{f,x}(x)$. Ak sa počíta elasticita funkcie f: $y = f(x)$ v bode x_0, vypočíta sa najprv funkcia elasticity a potom sa do nej dosadí za x hodnota x_0.

Veta 1. Číselna hodnota elasticity $\varepsilon_{f,x}$ funkcie $f(x)$ vzhľadom na x udáva, o koľko percent sa (približne) zmení hodnota funkcie $f(x)$, ak sa nezávisle premenná x zmení o jedno percento.

Úplne analogicky sa dá pojem elasticity preniesť na funkciu s n nezávisle premennými $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, pričom sa skúma iba zmena jednej nezávisle premennej x_i a ostatné premenné sa nemenia (podmienka ceteris paribus, v skratke c. p.).
Ak sa označí relatívna zmena nezávisle premennej x_i ako $\mathrm{d}x_i/x_i$ a ňou vyvolaná zmena funkcie f (c. p.) ako $\frac{\mathrm{d}f_{x_i}}{f}$ (pričo $\mathrm{d}f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.\mathrm{d}x_i$ je parciálny diferenciál), dostane sa podľa (3) analogicky

$$\varepsilon_{f,x_i} := \frac{\frac{\mathrm{d}f_{x_i}}{f}}{\frac{\mathrm{d}x_i}{x_i}} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.\frac{x_i}{f} \qquad (x_i, f \neq 0) \tag{5}$$

Veta 2. Číselna hodnota parciálnej elasticity $\varepsilon_{f,x}$ funkcie $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ vzhľadom na x_i udáva, o koľko percent sa (približne) zmení hodnota funkcie $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, ak sa nezávisle premenná x_i zmení o jedno percento a ostatné nezávisle premenné sa nemenia.

3 Eulerov vzťah homogenity

Pre homogénnu funkciu f existuje známy vzťah medzi jej parciálnymi deriváciami a jej stupňom homogenity r. Funkcia $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ je homogénna stupňa r, ak platí

$$\mathrm{f}(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots \lambda x_n) = \lambda^r. f(x_1, x_2, \ldots x_n) \text{ pre všetky } \lambda \text{ a všetky } x_1, x_2, \ldots x_n. \tag{6}$$

Ak sa obe strany (6) zderivujú podľa λ, dostaneme podľa pravidla derivácie zloženej funkcie výraz

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda x_1)}.\frac{\partial(\lambda x_1)}{\partial\lambda} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_n)}.\frac{\partial(\lambda x_n)}{\partial\lambda} = \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_1)}\, x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_n)}\,.\, x_n = r.\lambda^{r-1}.f(x_1, \ldots x_n) \tag{7}$$

Vzťah (7) platí pre každé $\lambda > 0$ a teda aj pre $\lambda = 1$. Ak dosadíme $\lambda = 1$ do (7), platí identita

$$x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} = r \,.\, f(x_1, x_2 \dots x_n) \qquad (8)$$

Vzťah (8) sa nazýva *Eulerova relácia homogenity*.

4 Elasticita produkčnej funkcie

Produkčná funkcia predstavuje závislosť objem produkcie z v určitom výrobnom procese od výrobných faktorov $x_1, x_2, \dots x_m$. Zapisujeme ju $f{:}z = f(x_1, x_2, \dots x_m)$.

Elasticita produkčnej funkcie dáva syntetickú informáciu o vzťahu medzi priemerným a marginálnym produktom, ktorá pre určitú úroveň fixného vstupu predstavuje vzťah medzi zmenou celkového produktu a zmenou variabilného vstupu.

Jednou z najčastejších používaných produkčných funkcií je Cobbova-Douglasova produkčná funkcia, ktorá má tvar

$$Q = qK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad (9)$$

kde Q (produkcia), L (práca) a K (kapitál) sú výrobné faktory, q je parameter.

Na základe štatistických údajov spracovateľského priemyslu USA v rokoch 1899 až 1922 sa jej parametre stanovili takto: $Q = 1{,}01\ K^{0{,}27}\ L^{0{,}73}$.

Produkčné funkcie sa dajú použiť nielen v makroekonómii, ale aj na nižšej úrovni hospodárstva, napríklad na úrovni výrobného podniku. Existuje široká trieda produkčných funkcií a zložitá matematika okolo nich (pozri [2], 7. kapitolu). My sa budeme zaoberať len tými produkčnými funkciami, ktoré „zvládne“ jednoduchá matematika.

Budeme uvažovať iba o produkčnej funkcii v tvare

$$Q = Q(r_1, \dots r_n) = a_0 . r_1^{a_1} . r_2^{a_2} . \dots . r_n^{a_n} \qquad (a_0 > 0\,;\, r_i > 0) \qquad (10)$$

kde Q je výstup a ri je vstup i-tého faktora.

Funkcia (10) je homogénna funkcia. Jej stupeň homogenity r je rovný súčtu všetkých jej exponentov: $r = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Parciálna elasticita výstupu Q vo funkcii (10) vzhľadom na i-tý vstupný faktor r_i (nazývaná aj *produkčná elasticita i-tého faktora*) je podľa (5)

$$\varepsilon_{Q,r_i} = \frac{\partial Q}{\partial r_i} . \frac{r_i}{Q} = a_0 r_1^{a_1} \dots a_i r_i^{a_i - 1} \dots r_n^{a_n} . \frac{r_i}{a_0 r_1^{a_1} \dots r_i^{a_i} \dots r_n^{a_n}} = a_i \qquad (11)$$

z čoho

$$\varepsilon_{Q,x_1} + \varepsilon_{Q,x_2} + \dots \varepsilon_{Q,x_n} = r \qquad (12)$$

ISSN 0323-262X ISSUE 2, ČÍSLO 2/2010

Ako miera relatívnej zmeny ľubovoľnej produkčnej funkcie $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, ak sa všetky vstupy $x_1, x_2, \ldots x_n$ zmenia o tú istú percentuálnu sadzbu (t. j. ak sú násobené tým istým faktorom λ), definuje sa tzv. škálová alebo *hladinová elasticita:*

$$\varepsilon_{f,\lambda} := \frac{\frac{\mathrm{d}f}{f}}{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}.\frac{\lambda}{f} \tag{13}$$

Číselná hodnota $\varepsilon_{f,\lambda}$ udáva, o koľko percent sa zmení výstup, ak sa „hladina produkcie“ zmení o jedno percento. Teda ak $\varepsilon_{f,\lambda} = 1$ vedie proporcionálne zvýšenie všetkých vstupov napríklad o 2 % ku zvýšeniu výstupu o 2 % (vtedy sa hovorí o *konštantnom škálovom výnose*).
Pri $\varepsilon_{f,\lambda} > 1$ (resp. $\varepsilon_{f,\lambda} < 1$) spôsobí proporcionálne zvýšenie všetkých vstupov nadproporcionálny (resp. podproporcionálny) rast výstupu *f*. Hovorí sa pritom o *rastúcich* (resp. *klesajúcich*) *škálových výnosoch*.

Príklad 5. Nech sú dané nasledujúce Cobbove-Douglasove produkčné funkcie
a) $Q = 5L^{0,6}.K^{0,4}$ b) $Q = 3L^{1,2}.K^{0,8}$ c) $Q = 8L^{0,2}.K^{0,3}$
Škálové elasticity sú súčtom exponentov:
a) $\varepsilon_{Q,\lambda} = 1$ b) $\varepsilon_{Q,\lambda} = 2$ c) $\varepsilon_{Q,\lambda} = 0,5$
Ak sa napríklad zdvojnásobí práca L a súčasne kapitál K, bude platiť:
a) výstup sa zdvojnásobí (konštantný škálový výnos), pretože $2^1 = 2$,
b) výstup sa zoštvornásobí (rastúci škálový výnos), pretože $2^2 = 4$,
c) výstup vzrastie približne o 41 % (klesajúci škálový výnos), pretože $2^{0,5} \approx 1,41421$.

5 Ocenenie vstupov a rozdelenie produktu

Podľa teórie hraničnej (marginálnej) produktivity je každý vstup ocenený hodnotou jeho hraničnej produktivity. Nech je napríklad „mzdová sadzba“ (cena faktora, faktorové kusové náklady) i-tého vstupu daná ako $k_i = \text{const}$. Potom sa (podľa c. p.) do i-tého vstupu vloží toľko, aby parciálna hraničná produktivita $\partial Q/\partial r_i$ (vynásobená trhovou cenou p získaného produktu) vykazovala hodnotu k_i vzťahom

$$p.\frac{\partial Q}{\partial r_i} = k_i \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{14}$$

Z množstva i-tého vstupu sa teda nasadí toľko, aby trhová hodnota s „poslednou“ jednotkou vstupu získaného produktu zodpovedala práve ocenenie nákladu k_i. Ocenenie nákladu týmto spôsobom určí vložené množstvo r_i každého produkčného nákladu a tým aj celkový objem produkcie $Q = Q(r_1, \ldots r_n)$.

Náklad i-tého vstupu FR_i je podľa (14) $FR_i = k_i.r_i = p_i.r.\dfrac{\partial Q}{\partial r_i}$ a tým celkový náklad FR je súčet

$$FR = FR_1 + \ldots + FR_n = p.r_1.\frac{\partial Q}{\partial r_1} + p.r_2.\frac{\partial Q}{\partial r_2} + \ldots + p.r_n.\frac{\partial Q}{\partial r_n} \quad (15)$$

Náklad všetkých vstupov je podľa (15)

$$FR = FR_1 + \ldots + FR_n = r_1.\frac{\partial Q}{\partial r_1} + r_2.\frac{\partial Q}{\partial r_2} + \ldots + r_n.\frac{\partial Q}{\partial r_n} \text{ pre } p \equiv 1 \quad (16)$$

Nastoľuje sa otázka, nakoľko je s pomocou vstupov $r_1,...r_n$ vyrobený výstup $Q(r_1,...r_n)$ pohltený ocenením vstupov.

Budeme uvažovať o stupni r homogénnej produkčnej funkcie $Q = Q(r_1,...r_n)$. Podľa Eulerovej relácie homogenity (8) platí

$$x_1.\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2.\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots x_n.\frac{\partial f}{\partial x_n} = r.f(x_1, x_2 \ldots x_n) \quad (17)$$

a zo (16) bezprostredne nasleduje

$$FR = r.Q(r_1,...r_n). \quad (18)$$

To znamená, že súčet FR všetkých vstupov homogénnej produkčnej funkcie je úmerný dosiahnutej hodnote produktu Q. Koeficient úmernosti je stupeň homogenity r. Takto závisí odpoveď na práve položenú otázku (pri homogénnych produkčných funkciách a pri oceňovaní podľa hraničnej produktivity) od výšky stupňa homogenity r:

a) V prípade konštantných škálových výnosov (ak je $r = 1$) dostávame z (18)

$$FR = Q(r_1,...r_n). \quad (19)$$

Celková hodnota produkcie je (nezávisle od objemu produkcie) spotrebovaná oceňovaním vstupov.

b) V prípade rastúcich škálových výnosov (ak je $r > 1$) dostávame zo (18)

$$FR > Q(r_1,...r_n). \quad (20)$$

Získaná hodnota produkcie nestačí na to, aby sa všetky potrebné vstupy ocenili podľa ich hraničných produktivít. Na dosiahnutie rovnovážneho stavu by musela byť cena nižšia ako hodnota hraničnej produktivity.

c) V prípade klesajúcich škálových výnosov (ak je $r < 1$) dostávame z (18)

$$FR < Q(r_1,...r_n). \quad (21)$$

Po ocenení všetkých vstupov podľa hraničnej produktivity zostáva zisk.

Pre podiel nákladu FR_i/Q i-tého vstupu na hodnote celkovej produkcie Q platí podľa (15) a (11) pre ľubovoľné (aj nie homogénne) produkčné funkcie vzťah

ISSN 0323-262X ISSUE 2, ČÍSLO 2/2010

$$\frac{FR_i}{Q} = \frac{r_i}{Q}.\frac{\partial Q}{\partial r_i} = \varepsilon_{x,r_i} \tag{22}$$

t. j. podiel nákladu *i*-tého vstupu na hodnote celkovej produkcie je rovný produkčnej elasticite *i*-tého vstupu.

Pomer nákladov FR_i/FR_k dvoch ľubovoľných vstupov *i, k* sa dostane z (22) delením:

$$\frac{FR_i}{FR_k} = \frac{\frac{FR_i}{Q}}{\frac{FR_k}{Q}} = \frac{\varepsilon_{Q,r_i}}{\varepsilon_{Q,r_k}} \tag{23}$$

t. j. pomer nákladov dvoch ľubovoľných vstupov je rovný pomeru ich produkčných elasticít.

Ak je produkčná funkcia $Q(r_1,...r_n)$ homogénna stupňa r, dá sa podľa (18) a (15) vypočítať aj podiel nákladu FR_i/FR *i*-tého vstupu na celkovom náklade vstupov:

$$\frac{FR_i}{FR} = \frac{r_i.\frac{\partial Q}{\partial r_i}}{r.Q} = \frac{\varepsilon_{Q,r_i}}{r} \tag{24}$$

Teda podiel nákladu *FRi/FR i*-tého vstupu na celkovom náklade vstupov je rovný podielu produkčnej elasticity *i*-tého vstupu a stupňa homogenity.

Príklad 5. Nech je daná Cobbova-Douglasova produkčná funkcia stupňa $r = 1$: $Q = c.L^{\alpha}.K^{\beta} = 4.L^{0,7}.K^{0,3}$ (*L* je vstup práce, *K* je vstup kapitálu, *Q* je výstup).
Výstupná cena nech je $p = 1$ pj/jm. Vypočítajte podiel nákladov práce a kapitálu.
Riešenie. Celková odmena práce FR_L je podľa teórie hraničnej produktivity

$$FR_L = L.\frac{\partial Q}{\partial L} = L.\,2{,}8\,.L^{-0,3}.\,K^{0,3} = 2{,}8\,.L^{0,7}.K^{0,3}$$

Celkový náklad kapitálu (úroky) je

$$FR_K = K.\frac{\partial Q}{\partial K} = K.1{,}2.L^{0,7}.K^{-0,7} = 1{,}2.L^{0,7}.K^{0,3}$$

Celkový náklad vstupov je

$$FR = FR_L + FR_K = 4.L^{0,7}.K^{0,3} = Q.$$

Podiely nákladov na celkovej hodnote produkcie sú

$$\frac{FR_A}{Q} = \frac{2{,}8L^{0{,}7}K^{0{,}3}}{4L^{0{,}7}K^{0{,}3}} = 0{,}7 = \varepsilon_{Q,L} = \alpha$$
$$\frac{FR_K}{Q} = \frac{1{,}2L^{0{,}7}K^{0{,}3}}{4L^{0{,}7}K^{0{,}3}} = 0{,}3 = \varepsilon_{Q,K} = \beta$$

70 % hodnoty produkcie pripadá na odmeny za prácu a 30 % na náklady kapitálu. Celkový produkt je spotrebovaný na ocenenie vstupov.
Pomer nákladov faktorov je podľa (23)

$$\frac{FR_L}{FR_K} = \frac{2{,}8L^{0{,}7}K^{0{,}3}}{1{,}2L^{0{,}7}K^{0{,}3}} = \frac{2{,}8}{1{,}2} = \frac{\varepsilon_{Q,L}}{\varepsilon_{Q,K}} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{0{,}7}{0{,}3}$$

t. j. náklady práce a náklady kapitálu sú v pomere 7:3. Pretože $FR = Q$, sú podiely nákladov na celkovom náklade tie isté ako na hodnote produkcie, totiž α a β.

6 Záver

Pre danú výrobu je adekvátna práve jedna produkčná funkcia. Ak to nie je funkcia (10), treba použiť zložitejšiu matematiku. Premenné a k nim patriace parametre sa určujú metódami matematickej štatistiky. Náhodné výkyvy vo výrobe vedú k odchýlkam od skutočnej hodnoty parametrov. Aby sa odchýlky minimalizovali, treba spracovať údaje za veľa období. Najlepšie za tie obdobia, keď sa náhodné výkyvy nevyskytli. Preto je určenie parametrov produkčnej funkcie náročná úloha

Jednoduchá matematika okolo Cobbovej-Douglasovej funkcie (10) poukazuje na to, že sa oplatí poznať vstupy, ktoré vstupujú do výroby a aj parametre, ktorými sa na výrobe podieľajú. Vstupy na podnikovej úrovni môžu byť práca, materiál, energia atď. Vstupy musia byť na sebe nezávislé. Zistí sa to korelačnou analýzou, vychádzajúcou z údajov o nákladoch na vstupy. Ďalší krok je určovanie parametrov produkčnej funkcie. Používajú sa pritom regresné metódy. Ak sa výraz (10) zlogaritmuje, prejde do tvaru

$$1\mathrm{n}Q = 1\mathrm{n}a_0 + a_1 1\mathrm{n}r_1 + a_2 1\mathrm{n}r_2 + \ldots + a_n 1\mathrm{n}r_n \tag{25}$$

a na ten sa dajú použiť bežné algoritmy a programy na multilineárnu regresiu.

Pri tvorbe ekonomických modelov platí pravidlo: adekvátny model sa dá zostaviť iba na základe údajov ekonomiky, stabilnej počas mnohých rokov. Nemusí sa pritom použiť práve algoritmus (25), ale musia byť k dispozícii patričné údaje. Je to náročná úloha, ktorá sa nedá vyriešiť v tomto článku.

ISSN 0323-262X ISSUE 2, ČÍSLO 2/2010

Úspešnosť praktickej aplikácie elasticity sa prejaví napríklad v marketingu, pri odhade zmeny dopytu po tovare vzhľadom na zmenu jeho ceny na trhu. Je známe, že trhová cena neodráža iba výrobné náklady a náklady na odbyt. Preto pri určovaní parametrov produkčnej funkcie treba medzi vstupy zaradiť okrem výrobných nákladov aj náklady na odbyt, náklady na reklamu atď. Samozrejme, produkčná funkcia nemusí byť práve Cobbova–Douglasova, ale dá sa dobre aproximovať touto funkciou.

Literatúra

[1] FECENKO, J. – SAKÁLOVÁ, K.: *Matematika 2*. Bratislava: Elita 1999.
[2] TIETZE, J.: *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik. 2. verbesserte Auflage.* Vieweg Braunschweig/Wiesbaden 1990.
[3] KLŮFA, J. – CONFAL, J.: *Matematika pro ekonomy.* Praha: Ekopres 1997.
[4] FENDEK, M.: *Kvantitatívna mikroekonómia*. Bratislava: ELITA 1999.

ISSN 0323-262X ISSUE 2, ČÍSLO 2/2010